现代数学译丛

解析数论基础

〔苏〕A. A. 卡拉楚巴 著



科学出版社

O156·4
I

现代数学译丛

解析数论基础

〔苏〕A. A. 卡拉楚巴 著

潘承彪 张南岳 译

科学出版社

1984

内 容 简 介

本书以解析数论的三个著名问题：素数分布、哥德巴赫问题和华林问题为中心，很好地阐明了解析数论的三个重要方法：复积分法、圆法及三角和法．本书的特点是少而精，叙述和证明简洁．阅读本书仅需要初等数论、微积分及复变函数基础知识．书中有不少习题，其中一些是近代解析数论的最重要的成果，读者可通过这些习题了解近代解析数论的研究领域．

本书可供大专院校数学系师生、研究生及有关的科学工作者阅读．

А. А. Карацуба

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА», 1975

现代数学译丛

解 析 数 论 基 础

〔苏〕А. А. 卡拉楚巴 著

潘承彪 张南岳 译

责任编辑 吕 虹 张鸿林

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1984 年 3 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

1984 年 3 月第一次印刷　　印张：5 7/8

印数：0001—12,000　　字数：149,000

统一书号：13031・2512

本社书号：3451・13—1

定价： 1.15 元

序　　言

数论是研究整数性质的．解析数论乃是数论的一个分支，除了数论特有的方法外，它本质上是利用数学中的解析工具来研究数论．

本书的目的是向广大读者介绍解析数论的中心问题．撇开次要的细节，作者力求叙述那些导致该理论的现代状况的主要内容。所以书中给出的结果常常不是目前已知的最好结果，但二者之间并无原则差异．

本书讨论解析数论中的三个问题：素数在自然数列和算术数列中的分布，Goldbach 问题与 Waring 问题．以解决这些问题为例，阐明解析数论的基本方法：复积分法，G. H. Hardy-J. E. Littlewood-S. Ramanujan 的圆法，以及 И. М. Виноградов 三角和方法。

从第三章开始，每章后面都配有问题，这些问题和主题紧密相关，建议读者依次去做．这些问题进一步阐明所证明的定理，或者引出现代数论的新想法．

本书要求读者具备 И. М. Виноградов 的《数论基础》，大学数学分析教程，以及 И. И. Привалов 的《复变函数引论》范围内的知识．

书中所涉及到的一些问题，历史发展以及参考文献可在专著[1—10]中找到．

命题和公式在每章中各自编排，在引用其他章节的命题时，将指出其所在的章节．

作者对于 С. М. Воронин 和 А. Ф. Лаврик 的宝贵意见表示衷心感谢．

记　　号

$c, c_0, c_1, \cdots$表示绝对正的常数，一般地说，在不同的定理中它们是不同的.

当A是正的时，记号$B = O(A)$, $B \ll A$表示$|B| \leqslant cA$；记号$A \asymp B$表示

$$c_1A \leqslant B \leqslant c_2A.$$

$\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots$表示任意小的正常数. n, m, k, l, N表自然数；除第一章外，$p, p_1, \cdots$表素数. $\mu(n)$表 Möbius 函数，

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ 0, & n = p^2m; \\ (-1)^k, & n = p_1\cdots p_k. \end{cases}$$

当$x > 0$时，

$$\ln x = \log x = \int_1^x \frac{du}{u}; \ \mathrm{Li}\, x = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + c_0,$$

其中

$$c_0 = \lim_{\delta \to 0}\left(\int_0^{1-\delta} \frac{du}{\ln u} + \int_{1+\delta}^2 \frac{du}{\ln u}\right);$$

$\Lambda(n)$表 Mangoldt 函数，

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^k; \\ 0, & n \neq p^k. \end{cases}$$

$\varphi(k)$表 Euler 函数——不大于k且与k互素的自然数的个数.

$\psi(x)$表 Чебышев 函数，

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n); \qquad \pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1;$$

当$l \leqslant k$, $(l, k) = 1$时，

$$\psi(x; k, l) = \sum_{\substack{n \equiv l \pmod{k} \\ n \leqslant x}} \Lambda(n);$$

$$\pi(x; k, l) = \sum_{\substack{p \equiv l \pmod{k} \\ p \leqslant x}} 1.$$

$\tau(n)$ 表 n 的正除数的个数；$\tau_k(n)$ 表方程 $x_1 x_2 \cdots x_k = n$ 的解数，$x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是自然数；因此 $\tau_2(n) = \tau(n)$；$\Omega(n)$ 表 n 的素因子个数． 对于实数 α，$[\alpha]$ 表 α 的整数部分，即不超过 α 的最大整数；$\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ 表 α 的小数部分；$(\alpha) = \min(\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\})$ 表 α 到最近整数的距离．

s 表复数，$s = \sigma + it$，其中 $i^2 = -1$，$\operatorname{Re} s = \sigma$，$\operatorname{Im} s = t$；$\bar{s} = \sigma - it$；一般地，$\bar{f}$ 表与 f 共轭的量．

目 录

第一章　有穷级整函数

这章具有辅助性质，它包含以后所必需的整函数知识。

§1. 无穷乘积. Weierstrass 公式

我们引进无穷乘积的概念.

定义 1. 设 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 是异于 -1 的无穷复数序列. 形如

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)\cdots \tag{1}$$

的表达式称为无穷乘积。

形如

$$\prod_{n=1}^{k}(1+u_n)=(1+u_1)\cdots(1+u_k)=v_k \tag{2}$$

的表达式称为部分乘积.

定义 2. 如果序列 (2) v_k 当 $k\to\infty$ 时趋于 $v\neq 0$，则称无穷乘积 (1) 收敛，其值为 v，即

$$v=\lim_{k\to\infty}v_k=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n). \tag{3}$$

如果序列 v_k 不收敛，或者 $v=0$，则称无穷乘积 (1) 发散.

对于大多数情形，下面的收敛判别法是够用的.

定理 1. 如果级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{4}$$

绝对收敛，则乘积 (1) 收敛。

证　因为级数

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots$$

收敛，所以

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=0;$$

不失一般性，可以设 $|u_n|\leqslant\frac{1}{2}$, $n=1,2,\cdots$. 首先设 $u_n=a_n$ 是实数，$n=1,2,\cdots$. 那么 $|\ln(1+u_n)|\leqslant 2|u_n|$. 由此推出序列

$$\ln(1+u_1)+\cdots+\ln(1+u_n)=\ln(1+u_1)\cdots(1+u_n)$$

收敛，所以乘积 (1) 收敛.

现在设 u_n 是任意复数，需要证明，当 $n\to\infty$ 时，两个实数序列

$$|v_n|=|(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)|$$
$$=|1+u_1|\cdots|1+u_n|, \tag{5}$$

$$\arg v_n=\arg(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)$$
$$=\arg(1+u_1)+\cdots+\arg(1+u_n) \tag{6}$$

均收敛.

序列 (5) 收敛的充分必要条件是序列 $|v_n|^2$ 收敛. 由于

$$|1+u_n|^2=|1+\alpha_n+i\beta_n|^2=1+\alpha_n^2+\beta_n^2+2\alpha_n,$$
$$\alpha_n=\operatorname{Re}u_n,\qquad \beta_n=\operatorname{Im}u_n,$$

以及

$$|\alpha_n^2+\beta_n^2+2\alpha_n|\leqslant|u_n|^2+2|u_n|,$$

所以从已经证明的结果立即推出 $|v_n|^2$ 收敛. 序列 (6) 的收敛性从以下事实推出：对于充分大的 n_0，当 $n>n_0$ 时，

$$|\arg(1+u_n)|=\left|\arcsin\frac{\beta_n}{\sqrt{(1+\alpha_n)^2+\beta_n^2}}\right|<\pi|\beta_n|.$$

定理 1 证毕.

现在转向研究某区域内的解析函数的无穷乘积.

定理 2. 设 $u_n(s)$ 是在某区域 G 内解析函数的无穷序列，且

a) $u_n(s)\neq -1$, $n=1,2,\cdots$, $s\in G$;

b) $|u_n(s)|\leqslant a_n$, $n=1,2,\cdots$, $s\in G$;

c) 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

那么，对于任意的 $s\in G$，乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(s)) \tag{7}$$

收敛．由等式

$$v(s)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(s))$$

定义的函数 $v(s)$ 在 G 内是解析的，且 $v(s)\neq 0$，$s\in G$。

证．对于 $s\in G$，乘积 (7) 的收敛性从定理 1 推出．要证明 $v(s)$ 的解析性，只要证明解析函数序列

$$v_k(s)=\prod_{n=1}^{k}(1+u_n(s))$$

对于 $s\in G$ 是一致收敛到 $v(s)$ 的．然后再应用 Weierstrass 定理。

设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=p$，$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=p_n$。

首先我们证明对于任意的 $s\in G$，有

$$\left|\frac{v(s)}{v_n(s)}-1\right|\leqslant\frac{p}{p_n}-1. \tag{8}$$

事实上，如果 $k\geqslant 1$，则

$$\begin{aligned}\left|\frac{v_{n+k}(s)}{v_n(s)}-1\right| &= |(1+u_{n+1}(s))\cdots(1+u_{n+k}(s))-1|\\ &= |u_{n+1}(s)+\cdots+u_{n+k}(s)+u_{n+1}(s)u_{n+2}(s)\\ &\quad+\cdots+u_{n+1}(s)\cdots u_{n+k}(s)|\\ &\leqslant a_{n+1}+\cdots+a_{n+k}+a_{n+1}a_{n+2}+\cdots\\ &\quad+a_{n+1}\cdots a_{n+k}\\ &= \frac{p_{n+k}}{p_n}-1.\end{aligned}$$

令 $k\to\infty$，便得到式 (8)．这样，对于 $n\geqslant n_0(\varepsilon)$ 以及任意的 $s\in G$，有

$$|v(s)-v_n(s)|=|v_n(s)|\left|\frac{v(s)}{v_n(s)}-1\right|\leqslant p_n\left(\frac{p}{p_n}-1\right)$$

$$=p-p_n<\varepsilon.$$

定理证毕。

定义 3. 在 s 平面上的任意有穷部分是解析的函数，称为整函数。

现在，我们来证明两个定理：一是存在整函数，以且仅以给定无穷序列中的数为其零点；二是整函数可按其零点展为无穷乘积(代数基本定理的推广)。

定理 3. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是无穷复数序列，且

$$0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots\leqslant|a_n|\leqslant\cdots$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|}=0.$$

则存在整函数 $G(s)$，它仅以 a_n 为其零点(如果其中 a_n 有相同的，那么 $G(s)$ 的零点有相应的重数)。

证. 设

$$u_n=u_n(s)=\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}, n=1,2,\cdots,$$

并考虑无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}u_n(s) \tag{9}$$

我们来证明这个乘积在复平面的每个点 $s\neq a_n$ 收敛，并且是以 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 为其零点的整函数 $G(s)$。考虑以原点为中心，以 $|a_n|$ 为半径的圆 C 及无穷乘积

$$\prod_{r=n}^{\infty}u_r(s).$$

我们要证明这个乘积在圆 $|s|<|a_n|$ 内收敛到解析函数。从而无穷乘积(9)在这个圆内也是解析的，它仅以 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 为零点。因为 $|a_n|\to\infty$，所以就证明了定理。对于 $|s|<|a_n|$，$r\geqslant n$，设

$$\ln u_r(s) = \ln\left(1-\frac{s}{a_r}\right)+\frac{s}{a_r}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_r}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{r-1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r-1},$$

这里 $\ln\left(1-\frac{s}{a_r}\right)$ 是对数主值，即 $s=0$ 时它等于0。

于是，当 $r=n,\ n+1,\cdots$ 和 $|s|<|a_n|$ 时，

$$\ln u_r(s) = -\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r - \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} - \cdots$$

及

$$u_r(s) = e^{-\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r - \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} - \cdots}$$

因此，我们应当证明，级数

$$\sum_{r=n}^{\infty}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r + \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} + \cdots\right] \qquad (10)$$

在 $|s|<|a_n|$ 内收敛到一个解析函数．对于任意的 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，及 $|s|\leqslant(1-\varepsilon)|a_n|$，有

$$\left|\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r + \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} + \cdots\right| \leqslant \frac{1}{r}(1-\varepsilon)^r + \frac{1}{r+1}(1-\varepsilon)^{r+1} + \cdots < \frac{(1-\varepsilon)^r}{\varepsilon r}.$$

因此，级数 (10) 在区域 $|s|\leqslant(1-\varepsilon)|a_n|$ 内一致收敛，即无穷乘积 (9) 在圆 C 内是解析的．定理证毕．

推论 1 (Weierstrass 公式)．设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是满足定理 3 的条件的复数序列，则函数

$$G(s) = s^m \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}$$

是整函数，且仅以 $0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 为其零点．

推论 2. 设序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 满足定理 3 的条件，且存在整数 $p\geqslant 0$，使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{p+1}}$$

收敛，则函数

$$G_1(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^p}$$

满足定理 3 的要求。

事实上，在这种情况下，当 $|s|\leqslant(1-\varepsilon)|a_n|$ 时，级数

$$\sum_{r=n}^{\infty}\left[\frac{1}{p+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{p+1}+\frac{1}{p+2}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{p+2}+\cdots\right]$$

有控制级数

$$\sum_{r=n}^{\infty}\frac{(1-\varepsilon)^{p+1}}{(p+1)\varepsilon}\cdot\left(\frac{|a_n|}{|a_r|}\right)^{p+1}<+\infty.$$

定理 4. 每个整函数 $G(s)$ 可以表为以下形式

$$G(s)=e^{H(s)}s^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}},\quad(*)$$

其中 $H(s)$ 是整函数，而数 $0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是 $G(s)$ 的零点，且按其模的增长顺序排列。如果除此以外，序列 $a_n, n=1,2,\cdots,$ 满足推论 2 的条件，则

$$G(s)=e^{H(s)}s^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^p}$$

证. $G(s)$ 的零点不能有极限点，即它们能按模的增长顺序排列。由定理 3，我们可以构造整函数 $G_1(s)$，它以 $G(s)$ 的零点为其零点。设 $\varphi(s)=\dfrac{G(s)}{G_1(s)}$，$s\neq a_n$；$\varphi(a_n)=\lim\limits_{s\to a_n}\varphi(s)$。可以看出，$\varphi(s)$ 是不等于零的整函数，即 $\varphi(s)$ 的对数是整函数。于是

$$\varphi(s)=e^{H(s)},$$

其中 $H(s)$ 是整函数。这就证明了定理的第二个断言。定理证毕。

§2. 有穷级整函数

我们引进今后所必需的一些定义.

定义 4. 设 $G(s)$ 是整函数,

$$M(r)=M_G(r)=\max_{|s|=r}|G(s)|.$$

如果存在 $a>0$, 使得

$$M(r)<e^{r^a},\quad r>r_0(a)>0, \tag{11}$$

则称 $G(s)$ 是有穷级整函数;在这种情形, $\alpha=\inf a$ 称为 $G(s)$ 的级.如果不管怎样的 $a>0$,式(11)都满足,则称 $G(s)$的级等于∞.

定义 5. 设 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$是复数序列,且

$$0<|s_1|\leqslant|s_2|\leqslant\cdots\leqslant|s_n|\leqslant\cdots. \tag{12}$$

如果存在 $b>0$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-b}<+\infty, \tag{13}$$

则称序列(12)有有穷收敛指数;在这种情形, $\beta=\inf b$ 称为序列(12)的收敛指数. 如果不管怎样的 $b>0$, 式(13)都不成立,则称序列(12)的收敛指数等于∞.

这节的基本结果是:

定理 5. 设 $G(s)$ 是有穷级 α 的整函数, $G(0)\neq 0$, s_n是 $G(s)$ 的零点序列,且 $0<|s_1|\leqslant|s_2|\leqslant\cdots\leqslant|s_n|\leqslant\cdots$, 则序列 s_n 有有穷收敛指数 $\beta\leqslant\alpha$,

$$G(s)=e^{g(s)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)e^{\frac{s}{s_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p},$$

其中 $p\geqslant 0$ 是使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|s_n|^{p+1}}<+\infty$$

的最小整数. $g(s)$ 是次数 $g\leqslant\alpha$ 的多项式,并且 $\alpha=\max(g,\beta)$. 除此以外,如果对于任意的 $c>0$, 能够找到无穷序列 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots, r_n\to+\infty$, 使得

$$\max|G(s)| > e^{cr_n^\alpha}, \quad |s| = r_n, n = 1, 2, \cdots,$$

则 $\alpha = \beta$ 及级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-\beta}$ 发散.

为了证明定理 5，需要一些辅助结果——引理. 在这些引理中，我们假定满足定理 5 中的条件，且利用这个定理中的记号.

引理 1. 设 $0 < r < R$，m 是 $G(s)$ 在圆 $|s| \leqslant r$ 上的零点个数，则

$$\left(\frac{R}{r}\right)^m \leqslant \frac{M(R)}{|G(0)|}, \text{ 其中 } M(R) = \max_{|s|=R}|G(s)|.$$

证. 考虑

$$F(s) = G(s) \prod_{n=1}^{m} \frac{R^2 - s\bar{s}_n}{R(s - s_n)}, \quad s \neq s_n,$$

$$F(s_n) = \lim_{s \to s_n} G(s) \prod_{n=1}^{m} \frac{R^2 - s\bar{s}_n}{R(s - s_n)}$$

其中 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 是 $G(s)$ 在 $|s| \leqslant r$ 上的零点.

函数 $F(s)$ 在圆 $|s| \leqslant R$ 上是解析的，且在 $|s| = R$ 上

$$|F(s)| = |G(s)|.$$

因此，由最大模原理，

$$|F(0)| = |G(0)| \prod_{n=1}^{m} \frac{R}{|s_n|} \leqslant \max_{|s|=R}|F(s)| = M(R),$$

由此推出引理的断言.

推论. 如果 m 是函数 $G(s)$ 在以原点为中心、$\frac{R}{2}$ 为半径的圆上的零点数，则

$$m \leqslant \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{M(R)}{|G(0)|}.$$

引理 2. 如果 $N(r)$ 表示 $G(s)$ 在圆 $|s| \leqslant r$ 上的零点数，则对于任意的 $\varepsilon > 0$，能够找到 $c = c(\varepsilon) > 0$，使得

$$N(r) \leqslant c r^{\alpha+\varepsilon};$$

此外有 $\beta \leqslant \alpha$.

证. 第一个不等式由引理 1 和 $G(s)$ 的级的定义推出．现在我们来证明，对于任意的 $b > \alpha$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^{-b}$$

收敛．由此就推出引理的第二个断言．由已经证明的不等式可知，对于任意的 $\varepsilon > 0$，有 $n \leqslant c|s_n|^{\alpha+\varepsilon}$，即

$$|s_n|^{-b} \leqslant c^{\frac{b}{\alpha+\varepsilon}} n^{-\frac{b}{\alpha+\varepsilon}}$$

如果 $b > \alpha$，那么对于充分小的 $\varepsilon > 0$，$\dfrac{b}{\alpha+\varepsilon} > 1$．因此上述级数收敛．

引理 3. 设 s_n 是具有有穷收敛指数 β 的序列 (12)，$p \geqslant 0$ 是使 $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^{-(p+1)} < +\infty$ 的最小整数．又设 $P(s)$ 是由下面等式给定的整函数：

$$P(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) e^{\frac{s}{s_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p}. \qquad (14)$$

那么，$P(s)$ 的级等于 β．此外，如果 $|s_n| \to +\infty$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^{-\beta} < +\infty$$

则

$$|P(s)| \leqslant e^{cr^\beta}, \quad |s| = r.$$

证. 设 $P(s)$ 的级是 α．由引理 2 推出，$\beta \leqslant \alpha$．剩下要证明，对于任意的 $\varepsilon > 0$，$\alpha \leqslant \beta + \varepsilon$，即应证明当 $|s| \to +\infty$ 时，

$$\ln|P(s)| < c(\varepsilon)|s|^{\beta+\varepsilon}.$$

为了简明起见，乘积 (14) 中的因子用 $u(s, s_n)$ 表示．设

$$\ln|P(s)| = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

其中 $\sum_1 = \sum\limits_{\left|\frac{s}{s_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}} \ln|u(s, s_n)|$，$\sum_2 = \sum\limits_{\left|\frac{s}{s_n}\right| > \frac{1}{2}} \ln|u(s, s_n)|$．

其次，对于 $\sum_1$ 中的项

$$\ln|u(s,s_n)| \leqslant \frac{1}{p+1}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1} + \frac{1}{p+2}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+2} + \cdots \leqslant 2\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1};$$

对于$\sum_2$中的项

$$\ln|u(s,s_n)| \leqslant \ln\left(1+\left|\frac{s}{s_n}\right|\right) + \left|\frac{s}{s_n}\right| + \cdots + \frac{1}{p}\left|\frac{s}{s_n}\right|^p$$

$$= r_p\left(\frac{|s|}{|s_n|}\right) \leqslant \begin{cases} c(p)\left|\frac{s}{s_n}\right|^p, & p \geqslant 1; \\ c(\varepsilon)\left|\frac{s}{s_n}\right|^\varepsilon, & p = 0. \end{cases}$$

因此,

$$\ln|p(s)| \ll \sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}} \left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1} + \sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right| > \frac{1}{2}} r_p\left(\left|\frac{s}{s_n}\right|\right).$$

如果 $\beta = p+1$，那么第一个和

$$\ll |s|^\beta.$$

设$\beta < p+1$和$\beta+\varepsilon < p+1$，则第一个和

$$\ll |s|^{\beta+\varepsilon} \sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}} \frac{1}{|s_n|^{\beta+\varepsilon}} \left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1-(\beta+\varepsilon)} \ll |s|^{\beta+\varepsilon}.$$

于是,对于任意的$p \geqslant 0$，第一个和 $\ll |s|^{\beta+\varepsilon}$。如果$p \geqslant 1$，那么第二个和(因为$\beta \geqslant p$)

$$\ll \sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right| > \frac{1}{2}} \left|\frac{s}{s_n}\right|^p = |s|^{\beta+\varepsilon} \sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right| > \frac{1}{2}} \frac{1}{|s_n|^{\beta+\varepsilon}} \cdot \left|\frac{s}{s_n}\right|^{p-(\beta+\varepsilon)}$$

$$\ll |s|^{\beta+\varepsilon};$$

如果$p=0$，那么第二个和

$$\ll \sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right| > \frac{1}{2}} \left|\frac{s}{s_n}\right|^\varepsilon = |s|^{\beta+\varepsilon} \sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right| > \frac{1}{2}} \frac{1}{|s_n|^{\beta+\varepsilon}} \cdot \left|\frac{s}{s_n}\right|^{-\beta} \ll |s|^{\beta+\varepsilon}.$$

引理的第一部分证毕．对于第二部分的证明，我们注意到这时一定有$\beta > 0$(因为$|s_n| \to +\infty$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-\beta}$收敛)。于是在

前面的论证中，用 β 代替 $\beta+\varepsilon$（即处处提出 $|s|^{\beta}$），且取 $0<\varepsilon<\beta$，就得到第二部分断言．引理证毕．

现在设 $P(s)$ 是有穷级 α 的整函数，$P(0)\neq 0$，根据定理 4，有

$$P(s)=e^{g(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)e^{\frac{s}{s_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{s_n}\right)^{n-1}}.$$

根据引理 2，s_n 的收敛指数不超过 α．设 $p\geqslant 0$，是使级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|s_n|^{p+1}}<+\infty$$

的最小整数．那么，由定理 4，

$$P(s)=e^{g(s)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)e^{\frac{s}{s_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^{p}},\qquad (15)$$

其中 $g(s)$ 是一整函数．以下我们将证明 $g(s)$ 是多项式（引理 5）．为此需要下面的引理，这个引理本身有独立的意义（见第六章§1）．

引理 4. 设 $R>0$ 及函数

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s-s_0)^n$$

在圆 $|s-s_0|\leqslant R$ 上是解析的，且在圆周 $|s-s_0|=R$ 上 $\mathrm{Re}\,f(s)\leqslant M$，则

a) $\frac{1}{n!}|f^{(n)}(s_0)|=|a_n|\leqslant 2\{M-\mathrm{Re}f(s_0)\}R^{-n}$，$n\geqslant 1$；

b) 在圆 $|s-s_0|\leqslant r<R$ 上

$$|f(s)-f(s_0)|\leqslant 2\{M-\mathrm{Re}f(s_0)\}\frac{r}{R-r},$$

$$|f^{(n)}(s)|\leqslant 2n!\{M-\mathrm{Re}f(s_0)\}\frac{R}{(R-r)^{n+1}},\quad n\geqslant 1.$$

证. 我们首先在 $s_0=0$，$a_0=f(0)=0$ 的条件下证明 a)．因为 $\mathrm{Re}\,f(s)$ 在边界上达到最大值，而当 $s=0$ 时，$f(s)=0$，所以 $M\geqslant 0$．设

$$a_n=|a_n|e^{i\varphi_n},\quad s=Re^{i\varphi},$$

有

$$\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cos(n\varphi + \varphi_n) R^n. \tag{16}$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| R^n$ 收敛，所以级数 (16) 对于 $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ 一致收敛，即它可以逐项积分，得到

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) d\varphi = 0.$$

此外，

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) \cos(n\varphi + \varphi_n) d\varphi = \pi |a_n| R^n, \ n \geqslant 1,$$

因此 ($M \geqslant 0, 1 + \cos(n\varphi + \varphi_n) \geqslant 0$)，有

$$\pi |a_n| R^n = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})(1 + \cos(n\varphi + \varphi_n)) d\varphi \leqslant 2\pi M;$$

$$|a_n| \leqslant 2M/R^n.$$

如果 $s_0 \neq 0$，$a_0 \neq 0$，那么我们考虑 $F(s')$，

$$F(s') = f(s' + s_0) - a_0 = a_1 s' + a_2 s'^2 + \cdots.$$

于是，$F(0) = 0$，在 $|s'| = R$ 上，$\operatorname{Re} F(s') \leqslant M - \operatorname{Re} f(s_0)$。由此从已经证明的结果，就推出引理的断言 a)。

其次，

$$|f(s) - f(s_0)| \leqslant 2\{M - \operatorname{Re} f(s_0)\} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

$$< 2\{M - \operatorname{Re} f(s_0)\} \frac{r}{R - r};$$

对 $f(s)$ 逐次微商，得到

$$|f^{(n)}(s)| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} |a_m| m(m-1)\cdots(m-n+1) |s - s_0|^{m-n}$$

$$\leqslant 2\{M - \operatorname{Re} f(s_0)\} \sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)\cdots(m-n$$

$$+1) \frac{r^{m-n}}{R^m}$$

$$= 2\{M - \text{Re } f(s_0)\} \frac{d^n}{dr^n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m$$

$$= 2n!\{M - \text{Re } f(s_0)\} \frac{R}{(R-r)^{n+1}}.$$

引理证毕.

引理 5. 式(15)中的 $g(s)$ 是次数 $g \leqslant \alpha$ 的多项式.

证. 取 $k = [\alpha]$; 那么式(15)中的 p 不超过 k. 我们证明

$$g^{(k+1)}(s) \equiv 0.$$

为此,对式(15)取对数并微商 $k+1$ 次,得到

$$g^{(k+1)}(s) = \frac{d^k}{ds^k} \frac{P'(s)}{P(s)} + k! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s_n - s)^{k+1}}. \tag{17}$$

考虑圆 $|s| \leqslant \frac{R}{2}$; 则当 $|s_n| > R$ 时,

$$|s_n - s| > \frac{1}{2}|s_n|,$$

又因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|s_n|^{k+1}}$ 收斂,所以当 $R \to \infty$ 时,

$$k! \sum_{|s_n| > R} \frac{1}{|s_n - s|^{k+1}} < k! 2^{k+1} \sum_{|s_n| > R} \frac{1}{|s_n|^{k+1}} \to 0. \tag{18}$$

现在考虑函数

$$\frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{P'(s)}{P(s)} + \sum_{|s_n| \leqslant R} \frac{1}{s_n - s} \right),$$

它是函数

$$g_R(s) = \ln \left\{ \frac{P(s)}{P(0)} \prod_{|s_n| \leqslant R} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right)^{-1} \right\}$$

的 $(k+1)$ 次导数(取对数主值).

在圆周 $|s| = 2R$ 上,

$$\left| \frac{P(s)}{P(0)} \prod_{|s_n| \leqslant R} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right)^{-1} \right| < c(\varepsilon) e^{(2R)^{\alpha+\varepsilon}};$$

根据最大模原理,这个不等式在圆 $|s| \leqslant 2R$ 也成立,即

$$\operatorname{Re} g_R(s) = \ln\left|\frac{P(s)}{P(0)}\prod_{|s_n|\leqslant R}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)^{-1}\right| < c_1(\varepsilon)R^{\alpha+\varepsilon};$$

此外，$\operatorname{Re} g_R(0)=0$。应用引理 4，b)$\left(取\ r=\frac{R}{2}\right)$，得到

$$|g_R^{(k+1)}(s)| < 2(k+1)!c_1(\varepsilon)R^{\alpha+\varepsilon}\cdot\frac{R}{\left(\frac{R}{2}\right)^{k+\varepsilon}} < c_2(\varepsilon)R^{\alpha-(k+1)+\varepsilon}.$$

因为 $\varepsilon>0$ 任意小，所以右端当 $R\to+\infty$ 时趋于0. 由式(17)，(18)，得到当 $R\to+\infty$ 时，$g^{(k+1)}(s)\to 0$，即 $g^{(k+1)}(s)=0$。引理证毕。

定理 5 的证明. 由定理 4，式(15)成立；由引理 5，$g(s)$ 是多项式，其次数 $g\leqslant\alpha$。因为 $e^{g(s)}$ 的级等于 g，而在式(15)中，按零点的乘积的级为 β，所以级 $\alpha\leqslant\max(g,\beta)$，即 $\alpha=\max(g,\beta)$。其次，如果 $\beta<\alpha$，那么 $\alpha=g$，因此

$$|G(s)|\leqslant c(\varepsilon)e^{c_1r^g}\cdot e^{c_2r^{\beta+\varepsilon}},$$

其中 $c_1>0$，$c_2>0$ 是绝对常数，$\varepsilon>0$ 是任意小的正数，即 ε 可以取得使 $\beta+\varepsilon<\alpha$，这与定理的条件矛盾，所以必有 $\alpha=\beta$。级数 $\Sigma|s_n|^{-\beta}$ 的发散性从引理 3 推出，定理 5 证毕.

推论. 如果 $G_1(s)$ 是有穷级 α 的整函数，则

$$G_1(s)=s^mG(s),$$

其中 $G(s)$ 是定理 5 中的整函数，$m\geqslant 0$。

第二章 Euler Gamma 函数

§1. 定义和最简单的性质

我们用 γ 表示下面的极限:

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m\right)$$

$$= 0.5772157\cdots.$$

常数 γ 称为 Euler 常数.

定义. Euler Γ 函数是由下面的等式给定的,

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}.$$

从定义和第一章的定理推出,$\frac{1}{\Gamma(s)}$ 是整函数,其级不大于 1. 其次,$\Gamma(s)$ 在整个 s 平面上除去点 $s=0, -1, -2, \cdots$ 外是解析的,这些点是 $\Gamma(s)$ 的简单极点.

定理 1 (Euler 公式). 等式

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} \tag{1}$$

成立.

证. 由无穷乘积的定义(第一章§1)和函数 $\Gamma(s)$ 的定义,

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s\lim_{m\to\infty} e^{s\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m\right)}\cdot\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}$$

$$= s\lim_{m\to\infty} m^{-s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)$$

$$= s\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)$$

$$= s \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} \left(1 + \frac{s}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{s}$$

$$= s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} \left(1 + \frac{s}{n}\right).$$

这就是所要证明的.

推论 1. $\Gamma(s) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2\cdots(n-1)n^s}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}$.

推论 2. $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$。

§2. Γ 函数的函数方程

下述定理的断言称为 Γ 函数的函数方程.

定理 2. 等式

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

成立.

证. 从式(1)我们得到,

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} = \frac{s}{s+1} \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s+1} \left(1 + \frac{s+1}{n}\right)^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1}}$$

$$= \frac{s}{s+1} \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+s}{n+s+1}$$

$$= \frac{s}{s+1} \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)(s+1)}{m+1+s} = s.$$

定理证毕.

推论. $\Gamma(n+1) = n!$, n 是自然数.

§3. 余元公式和积分公式

定理 3 (余元公式). 当 s 不等于整数时,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

证. 首先，我们把 $\sin \pi s$ 表为无穷乘积的形式. $\sin \pi s$ 是一级整函数，$s=0$，± 1，± 2，$\cdots$是它的零点. 由第一章定理 5，

$$\sin \pi s = s e^{H(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{s^2}{n^2}\right),$$

其中 $H(s)=as+b$.

取对数(对数的主值)，然后微商，我们得到

$$\pi \frac{\cos \pi s}{\sin \pi s} = \frac{1}{s} + H'(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2s}{n^2-s^2}.$$

当 $s\to 0$ 时，取极限得到 $a=0$. 即 $H(s)=b$. 其次，

$$\frac{\sin \pi s}{s} = c \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{s^2}{n^2}\right).$$

再令 $s\to 0$，得到 $c=\pi$，即

$$\sin \pi s = \pi s \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{s^2}{n^2}\right).$$

由 $\Gamma(s)$ 的定义，有

$$\Gamma(s)\Gamma(-s) = -\frac{1}{s^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)^{-1} = -\frac{\pi}{s \sin \pi s},$$

根据定理2，$\Gamma(1-s)=-s\Gamma(-s)$. 由此推出定理的断言.

推论 1. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

推论 2. $\Gamma(2n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$，$n$ 是自然数(加倍公式).

定理 4. 当 $\mathrm{Re}\, s>0$ 时，

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

证. 我们看出，右边的积分当 $\mathrm{Re}\, s \geqslant \sigma_0 > 0$ 时是一致收敛的. 因此，它表示一个在半平面 $\mathrm{Re}\, s>0$ 内解析的函数. 由定理 1 的推论 1 得到

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)n^s}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}$$

我们考虑函数

$$\prod(s;n)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}dt=n^s\int_0^1(1-t)^n t^{s-1}dt$$

$$=\frac{n^s}{s}\int_0^1(1-t)^n dt^s=n^s\frac{n}{s}\int_0^1(1-t)^{n-1}t^s dt$$

$$=\cdots=n^s\frac{n(n-1)\cdots 1}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}\int_0^1 t^{s+n-1}dt$$

$$=n^s\frac{n(n-1)\cdots 1}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

因此,

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\prod(s;n)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}dt.$$

设

$$\Gamma_1(s)=\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt.$$

那么,

$$\Gamma_1(s)-\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^n t^{s-1}\left(e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)dt+\int_n^\infty e^{-t}t^{s-1}dt\right\}.$$

后一个积分当$n\to\infty$时趋于零. 其次,当 $0\leqslant t<n$ 时,有

a) $e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\geqslant 0$, 因为

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=e^{n\log\left(1-\frac{t}{n}\right)}=e^{-n\left(\frac{t}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2+\cdots\right)};$$

b) $$0\leqslant e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=e^{-t}\left\{1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}$$

$$\leqslant e^{-t}\left\{1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right\},\qquad \text{因为}$$

$$e^t \geqslant \left(1+\frac{t}{n}\right)^n = e^{n\log\left(1+\frac{t}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{t}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2+\cdots\right)}$$

此外，当 $0<y<1$ 时，

$$(1-y)^n \geqslant 1-ny,$$

即

$$0 \leqslant e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}\left\{1-\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\right\} = e^{-t}\frac{t^2}{n}.$$

由此推出，当 $n\to\infty$ 时，第一个积分趋于零． 这就是所要证明的。

推论． $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$。

§4. Stirling 公式

在应用中，重要的是知道 $\Gamma(s)$ 当 $|s|\to\infty$ 时的性状。

引理． 当 n 是自然时，

$$\log\Gamma(n) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

证． 我们有

$$\log\Gamma(n) = \log(n-1)! = \sum_{k=1}^{n-1}\log k;$$

$$\begin{aligned}
\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log t\,dt &= \int_k^{k+\frac{1}{2}}\log t\,dt + \int_{k-\frac{1}{2}}^{k}\log t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}}\log(k+t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}}\log(k-t)dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}}\log(k^2-t^2)dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}}\log k^2dt + \int_0^{\frac{1}{2}}\log\left(1-\frac{t^2}{k^2}\right)dt \\
&= \log k + c_k,
\end{aligned}$$

其中

$$c_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \log\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt, \quad |c_k| \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

因此,

$$\log \Gamma(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \log k = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \log t\,dt - \sum_{k=1}^{n-1} c_k$$

$$= \left(n - \frac{1}{2}\right)\log\left(n - \frac{1}{2}\right) - \left(n - \frac{1}{2}\right)$$

$$- \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} c_k + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(n - \frac{1}{2}\right)\log n - n + c + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中 c 是绝对常数。 下面(定理5)将利用加倍公式证明 $c = \log\sqrt{2\pi}$.

定理 5. 设 $\delta > 0$, 当 $-\pi + \delta \leqslant \arg s \leqslant \pi - \delta$ 时, 公式(Stirling)

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right)\log s - s + \log\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

成立,其中当 $s = 1$ 时 $\log s = 0$, 而大 O 常数只依赖于 δ.

证. 考虑对数的主值,有

$$\log \Gamma(s) = -\gamma s - \log s + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{s}{n} - \log\left(1 + \frac{s}{n}\right)\right\}.$$

其次 ($[u]$ 是 u 的整数部分)

$$\int_0^N \frac{[u] - u + \frac{1}{2}}{u + s} du = \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1} \left(\frac{n + \frac{1}{2} + s}{n + s} - 1\right) du$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1}\left\{\frac{s}{n} - \log\left(1 + \frac{s}{n}\right)\right\} - \log((N-1)!)$$

$$- \left(S + \frac{1}{2}\right)\log s - s\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N-1}\right)$$

$$+\left(N-\frac{1}{2}+s\right)\log(N+s)-N.$$

根据上面的引理，

$$\log((N-1)!)=\left(N-\frac{1}{2}\right)\log N-N+c+O\left(\frac{1}{N}\right).$$

此外，当 $N\to\infty$ 时，

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}=\log N+\gamma+O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$\log(N+s)=\log N+\frac{s}{N}+O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

因此

$$\log\Gamma(s)=\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s-s+c+\int_0^\infty\frac{[u]-u+\dfrac{1}{2}}{u+s}du.$$

设 $\varphi(u)=\int_0^u\left([v]-v+\frac{1}{2}\right)dv$，我们看出，$|\varphi(u)|\leqslant 1$ 及

$$\int_0^\infty\frac{\varphi'(u)}{u+s}du=\int_0^\infty\frac{\varphi(u)}{(u+s)^2}du=O\left(\int_0^\infty\frac{du}{u^2+|s|^2-2u|s|\cos\delta}\right)$$
$$=O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

于是

$$\log\Gamma(s)=\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s-s+c+O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

在这个公式中取 $s=n,\ n+\frac{1}{2},\ 2n$，利用加倍公式及 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$；令 $n\to\infty$，就得到 $c=\log\sqrt{2\pi}$。定理证毕。

§5. Euler 积分与 Dirichlet 积分

与 Γ 函数紧密相关的函数是 Euler Beta 函数（Euler 积分）和 Dirichlet 积分。下面将证明 Euler B 函数的最简单的性质。

定义. 当 $\operatorname{Re} u > 0$，$\operatorname{Re} v > 0$ 时，Euler B 函数 $B(u, v)$ 由下面的等式给出

$$B(u, v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}dx.$$

定理 6. 等式

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$$

成立.

证. 不失一般性，可以假定 $\operatorname{Re} u > 1$，$\operatorname{Re} v > 1$. 首先在积分中作替换 $x = \frac{y}{1+y}$，得到

$$B(u, v) = \int_0^\infty \frac{y^{u-1}}{(1+y)^{u+v}}\,dy.$$

其次，根据定理 4，当 $\operatorname{Re} s > 0$ 时，

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt,$$

(作替换 $t = yz$，$y > 0$)

$$\Gamma(s)/y^s = \int_0^\infty z^{s-1}e^{-yz}dz.$$

用 $u+v$ 代替 s，$y+1$ 代替 y，得到

$$\frac{\Gamma(u+v)}{(1+y)^s} = \int_0^\infty z^{u+v-1}e^{-(y+1)z}dz.$$

等式两边乘以 y^{u-1}，并对 y 从 0 到 ∞ 积分，得到

$$\Gamma(u+v)\int_0^\infty \frac{y^{u-1}}{(1+y)^{u+v}}\,dy = \int_0^\infty y^{u-1}\left(\int_0^\infty z^{u+v-1}e^{-(y+1)z}dz\right)dy.$$

左边得到 $\Gamma(u+v)\,B(u, v)$. 其次，当 $y \geqslant 0$，$z \geqslant 0$ 时函数 $y^{u-1}z^{u+v-1}e^{-(y+1)z}$ 是 y，z 的连续函数. 此外，积分

$$y^{u-1}\int_0^\infty z^{u+v-1}e^{-(y+1)z}dz = \Gamma(u+v)\,\frac{y^{u-1}}{(1+y)^{u+v}},$$

$$z^{u+v-1}e^{-z}\int_0^\infty e^{-zy}y^{u-1}dy = \Gamma(u)z^{v-1}e^{-z}.$$

分别是 y，$y \geqslant 0$ 和 z，$z \geqslant 0$ 的连续函数. 因此，交换积分次序得

到

$$\int_0^\infty e^{-z} z^{u+v-1}\left(\int_0^\infty e^{-yz} y^{u-1} dy\right) dz = \Gamma(u)\int_0^\infty e^{-z} z^{v-1} dz = \Gamma(u)\Gamma(v).$$

由此以及解析开拓原理，定理得证.

定理 7. 设 $f(u)$ 是连续函数，$\alpha_1 > 0$，$\alpha_2 > 0$，$\cdots$，$\alpha_n > 0$，

$$I = \underset{\substack{t_1+t_2+\cdots+t_n \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t_1, t_2, \cdots, t_n \leqslant 1}}{\int \cdots \int} f(t_1 + t_2 + \cdots + t_n) t_1^{\alpha_1 - 1} t_2^{\alpha_2 - 1} \cdots t_n^{\alpha_n - 1} dt_1 dt_2 \cdots dt_n.$$

则

$$I = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)} \int_0^1 f(u) u^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n - 1} du.$$

证. 记 $\lambda = t_3 + t_4 + \cdots + t_n$ 并考虑积分

$$I_1 = \int_0^{1-\lambda}\left(\int_0^{1-\lambda-t_2} f(t_1 + t_2 + \lambda) t_1^{\alpha_1 - 1} dt_1\right) t_2^{\alpha_2 - 1} dt_2.$$

在 I_1 中作替换 $t_1 = \dfrac{t_2(1-v)}{v}$，然后交换积分次序：

$$I_1 = \int_0^{1-\lambda}\left(\int_{\frac{t_2}{1-\lambda}}^{1} f\left(\lambda + \frac{t_2}{v}\right)(1-v)^{\alpha_1 - 1} v^{-\alpha_1 - 1} dv\right) t_2^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} dt_2$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{(1-\lambda)v} f\left(\lambda + \frac{t_2}{v}\right) t_2^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} dt_2\right)(1-v)^{\alpha_1 - 1} v^{-\alpha_1 - 1} dv$$

在内层积分中作替换 $t_2 = \tau v$：

$$I_1 = \int_0^1\left(\int_0^{1-\lambda} f(\lambda + \tau)\tau^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} d\tau\right)(1-v)^{\alpha_1 - 1} v^{\alpha_2 - 1} dv$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}\int_0^{1-\lambda} f(\lambda + \tau)\tau^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} d\tau.$$

对于积分 I 得到公式

$$I = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \underset{\substack{\tau + t_3 + \cdots + t_n \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \tau, t_3, \cdots, t_n \leqslant 1}}{\int \cdots \int} f(\tau + t_3 + \cdots$$

$$+ t_n)\tau^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} t_3^{\alpha_3 - 1} \cdots t_n^{\alpha_n - 1} d\tau dt_3 \cdots dt_n.$$

由此推出定理的断言.

定理 7 中的积分 I 称为 Dirichlet 积分.

第三章　Riemann Zeta 函数

§1. 定义与最简单的性质

定义. 当 $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ 时，Riemann Zeta 函数 $\zeta(s)$ 由等式

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

给定.

由定义推出，$\zeta(s)$ 在半平面 $\operatorname{Re} s > 1$ 是解析的.

下面的公式 (Euler 公式或 Euler 恒等式)对于数论有重大意义:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

我们来证明这个等式. 当 $X \geqslant 1$, $\operatorname{Re} s > 1$ 时,由于级数

$$1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots$$

绝对收敛,以及自然数分解为素因子的积的唯一性,我们有

$$\prod_{p \leqslant X} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p \leqslant X} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right)$$
$$= \sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n^s} + R(s; X),$$

其中

$$|R(s; X)| \leqslant \sum_{n > X} \left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n > X} \frac{1}{n^\sigma} \leqslant \frac{1}{\sigma - 1} X^{1-\sigma},$$

即,当 $X \to +\infty$ 时, $R(s; X) \to 0$. 由此推出 Euler 公式.
当 $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ 时,从所证明的公式得到

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} = \left|\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\right| \leqslant \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^\sigma}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$$

$$\leqslant 1+\int_1^{\infty}\frac{du}{u^{\sigma}}=1+\frac{1}{\sigma-1};$$

$$|\zeta(s)|>\frac{\sigma-1}{\sigma}>0,$$

即，$\zeta(s)$ 在半平面 $\operatorname{Re} s>1$ 内没有零点。

我们把 $\zeta(s)$ 开拓到半平面 $\operatorname{Re} s>0$。

引理 1. 当 $\operatorname{Re} s>0$，$N\geqslant 1$ 时，

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{N^{1-s}}{s-1}-\frac{1}{2}N^{-s}+s\int_N^{\infty}\frac{\frac{1}{2}-\{u\}}{u^{s+1}}du.$$

证. 当 $\operatorname{Re} s>1$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^s}&=\sum_{n=N}^{\infty}n\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right)-\frac{1}{N^{s-1}}\\&=-\frac{1}{N^{s-1}}+s\sum_{n=N}^{\infty}n\int_n^{n+1}x^{-s-1}dx\\&=-\frac{1}{N^{s-1}}+s\sum_{n=N}^{\infty}\int_n^{n+1}[x]x^{-s-1}dx\\&=-\frac{1}{N^{s-1}}+s\int_N^{\infty}[x]x^{-s-1}dx\\&=-\frac{1}{N^{s-1}}+\frac{sN^{1-s}}{s-1}-s\int_N^{\infty}\{x\}x^{-s-1}dx\\&=\frac{N^{1-s}}{s-1}-\frac{1}{2}N^{-s}\\&\quad+s\int_N^{\infty}\left(\frac{1}{2}-\{x\}\right)x^{-s-1}dx.\end{aligned}$$

但是，最后这个积分所确定的函数在 $\operatorname{Re} s>0$ 是解析的，由解析开拓原理便推出引理的断言。

推论. $\zeta(s)$ 在半平面 $\operatorname{Re} s>0$ 除去点 $s=1$ 外是解析的，在点 $s=1$，$\zeta(s)$ 有一简单极点，其留数为 1.

在开拓 $\zeta(s)$ 到整个 s 平面之前，我们证明

引理 2. 设 $x>0$，α 是实数，

$$\theta(x, \alpha)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi x(n+\alpha)^2},$$

则

$$\theta\left(\frac{1}{x}, \alpha\right)=\sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x+2\pi i n \alpha}.$$

证. 不失一般性，可以假定 $0 \leqslant \alpha<1$。考虑函数

$$f(y)=e^{-(n+y+\alpha)^2 \pi x}, \quad 0<y<1.$$

我们把 $f(y)$ 开拓为整个 y 轴上的周期函数，周期为 1，它在整数点上的值等于左、右极限的平均值．于是（Fourier 级数）

$$e^{-(n+y+\alpha)^2 \pi x}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{2\pi i m y},$$

其中

$$C_m=\int_0^1 e^{-(n+y+\alpha)^2 \pi x} e^{-2\pi i m y} d y.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-(n+\alpha)^2 \pi x}+e^{-(n+1+\alpha)^2 \pi x}}{2} &=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 e^{-(n+y+\alpha)^2 \pi x-2\pi i m y} d y \\
&=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{-(y+\alpha)^2 \pi x-2\pi i m y} d y \\
&=\sum_{m=-M}^{+M} \int_n^{n+1} e^{-(y+\alpha)^2 \pi x-2\pi i m y} d y \\
&\quad+\lim_{K \rightarrow+\infty} \sum_{M<|m|<M+K} \int_n^{n+1} e^{-(y+\alpha)^2 \pi x-2\pi i m y} d y. \qquad (1)
\end{aligned}$$

但是，

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1} e^{-(y+\alpha)^2 \pi x-2\pi i m y} d y= & -\frac{e^{-(n+\alpha+1)^2 \pi x}-e^{-(n+\alpha)^2 \pi x}}{2\pi i m} \\
& +O\left(\frac{e^{-n^2 \pi x} \cdot\left(n^2+1\right)}{m^2}\right),
\end{aligned}$$

因此，

$$\left|\sum_{M<|m|<M+K}\int_n^{n+1} e^{-(y+\alpha)^2\pi x-2\pi imy}dy\right| = O\left(\frac{e^{-n^2\pi x}(n^2+1)}{M}\right),$$

$$\lim_{K\to+\infty}\sum_{M<|m|<M+K}\int_n^{n+1} e^{-(y+\alpha)^2\pi x-2\pi imy}dy = O\left(\frac{e^{-n^2\pi x}(n^2+1)}{M}\right).$$

式(1)两边对 $n=-N, -N+1, \cdots, N$ 求和，得到

$$\sum_{n=-N}^{+N} e^{-(n+\alpha)^2\pi x} = \sum_{m=-M}^{+M}\int_{-N}^{N+1} e^{-(y+\alpha)^2\pi x-2\pi imy}dy + O\left(\frac{1}{M}\right) + O(e^{-\pi N^2 x})^{1)},$$

令 $N\to+\infty$，得到

$$\theta(x, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(n+\alpha)^2\pi x} = \sum_{m=-M}^{+M}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+\alpha)^2\pi x-2\pi imy}dy + O\left(\frac{1}{M}\right).$$

再令 $M\to+\infty$，得到

$$\theta(x, \alpha) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi im\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2\pi x-2\pi imy}dy^{2)}$$

由此得到

$$\theta\left(\frac{1}{x}, \alpha\right) = x\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi im\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2\pi x-2\pi imyx}dy.$$

计算积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2\pi x-2\pi imyx}dy = e^{-\pi xm^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x(y+im)^2}dy$$

---

1) 原书此处误为

$$\sum_{m=-M}^{+M}\int_{-N}^{N} e^{-(y+\alpha)^2\pi x-2\pi imy}dy + O\left(\frac{N}{M}\right) + O(e^{-\pi Nx}).$$——译者注

2) 原书此处是先令 $M\to+\infty$，然后令 $N\to+\infty$，这是因为把 $O\left(\frac{1}{M}\right)$ 误为 $O\left(\frac{N}{M}\right)$ 的缘故。——译者注

$$= e^{-\pi x m^2} \lim_{K\to\infty} \int_{-K}^{+K} e^{-\pi x (y+im)^2} dy$$

$$= e^{-\pi x m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x u^2} du = x^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi x m^2},$$

最后一步是从估计沿以 $-K$, $+K$, $+K+im$, $-K+im$ 为顶点的矩形的两侧边上的积分与第二章定理 4 的推论得出的．引理得证．

推论． $\theta\left(\frac{1}{x}, 0\right) = \sqrt{x}\,\theta(x, 0)$.

§2. ζ 函数的函数方程

下述定理的断言称为 ζ 函数的函数方程．

定理 1. 等式

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

成立．

证． 根据第二章定理 4，对于 $\mathrm{Re}\, s > 0$ 及自然数 n，有

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{s}{2}-1} du = n^s \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} \pi^{\frac{s}{2}} x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

即

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

因此，当 $\mathrm{Re}\, s > 1$ 时，

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}\right) dx \qquad (2)$$

(和号与积分号可以交换次序是由以下事实推出的：$\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x} = O(e^{-\pi N^2 x})$，$x \geq 1$；而当 $0<x<1$ 时，$\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$)．

其次，如果

$$\omega(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2 x},$$

则从引理 2 的推论得到

$$\omega\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\omega(x).$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)dx&=\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)dx+\int_1^{\infty}x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)dx\\&=\int_1^{\infty}\left(x^{-\frac{s}{2}-1}\omega\left(\frac{1}{x}\right)+x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)\right)dx\\&=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}})\omega(x)dx.\end{aligned}\tag{3}$$

因为当 $x\to+\infty$ 时 $\omega(x)=O(e^{-\pi x})$，所以从式 (3) 推出式 (2) 的右边对于任意的 $s\neq 0,1$ 是解析函数，并且用 $1-s$ 代替 s 时是不变的，即

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

推论. 函数

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

是整函数，且

$$\xi(s)=\xi(1-s).$$

§3. 非显然零点. 对数导数按零点展为级数

从定理 1 看出，因为当 $s=-2,-4,-6,\cdots,-2n$ 时 $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}=0$，所以 ζ 函数等于零；当 $s=0$ 时因为 $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$ 的零点与 $\zeta(1-s)$ 的极点相抵消，所以 ζ 函数不等于零. 上述这些零点称为显然零点. 除了显然零点外，ζ 函数在带形 $0\leqslant \mathrm{Re}\,s\leqslant 1$ 上

(临界带形)有无穷多个非显然零点.

定理 2. 函数 $\xi(s)$ 是一级整函数. 它有无穷多个零点 ρ_n, $0 \leqslant \operatorname{Re} \rho_n \leqslant 1$; 级数 $\sum|\rho_n|^{-1}$ 发散,而对于任意的 $\varepsilon > 0$,级数 $\sum|\rho_n|^{-1-\varepsilon}$ 收敛. $\xi(s)$ 的零点是 $\zeta(s)$ 的非显然零点.

证. 当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时, $\zeta(s)$ 没有零点, 因而 $\xi(s)$ 也没有零点. 由定理 1 推出,当 $\operatorname{Re} s < 0$ 时, $\xi(s) \neq 0$. 因为 $\xi(0) = \xi(1) \neq 0$, 所以仅仅 $\zeta(s)$的非显然零点才是 $\xi(s)$ 的零点.

我们来确定 $\xi(s)$ 的级.为此估计当 $|s| \to +\infty$ 时的 $\xi(s)$ (只要对 $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}$ 作出估计). 由引理 1,当 $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}$ 时,

$$\zeta(s) = O(|s|)$$

因为

$$|\Gamma(s)| \leqslant e^{c|s|\ln|s|},$$

所以 $\xi(s)$ 的级不超过 1. 但是当 $s \to +\infty$ 时,

$$\ln \Gamma(s) \sim s \ln s,$$

因此, $\xi(s)$ 的级等于 1. 由第一章定理 5 推出,级数

$$\sum|\rho_n|^{-1}$$

发散,这里 ρ_n 是 $\xi(s)$ 的零点. 因此 $\xi(s)$ 有无穷多个零点. 而级数

$$\sum|\rho_n|^{-1-\varepsilon}$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$ 是收敛的. 定理证毕.

推论 1. 公式

$$\xi(s) = e^{A+Bs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{\frac{s}{\rho_n}} \tag{4}$$

成立.

推论 2. ζ 函数的非显然零点关于直线 $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ 和 $\operatorname{Im} s = 0$ 是对称分布的.

以下,非显然零点总是按其虚部的绝对值的增长顺序排列,而虚部绝对值相同的则按任意顺序排列.

定理 3. 等式

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)+B_0$$

成立，其中 ρ_n 是 $\zeta(s)$ 的所有非显然零点. B_0 是绝对常数.

证. 在式(4)的左、右两边取对数导数就得到定理的断言.

§4. 关于零点的最简单定理

我们来证明关于 $\zeta(s)$ 的非显然零点的若干定理.

定理 4. 设 $\rho_n=\beta_n+i\gamma_n$, $n=1,2,\cdots$, 是 $\zeta(s)$ 的非显然零点，$T\geqslant 2$[1]，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2}\leqslant c\log T.$$

证. 设 $s=2+iT$，则

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right|\leqslant\sum_{n\leqslant T}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\right)$$
$$+\sum_{n>T}\frac{|s|}{4n^2}\leqslant\log T+1. \tag{5}$$

因此(定理 3)

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-1}-B_0-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right)$$
$$-\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right)$$
$$\leqslant c_1\log T-\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right).$$

---

1) 事实上，$T\geqslant 2$ 的限制并非必要. 对于任意实数 T，只要用 $\log([T]+2)$ 代替 $\log T$ 定理仍然成立. ——译者注

因为 $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{2+iT_1}}\right| < c_2$，所以

$$\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) \leqslant c_3 \log T.$$

进而从

$$\operatorname{Re} \frac{1}{s-\rho_n} = \operatorname{Re} \frac{1}{(2-\beta_n) + i(T-\gamma_n)}$$

$$= \frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2 + (T-\gamma_n)^2} \geqslant \frac{0.5}{1+(T-\gamma_n)^2},$$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\rho_n} = \frac{\beta_n}{\beta_n^2 + \gamma_n^2} \geqslant 0$$

推出定理的断言.

推论 1. 满足 $T \leqslant |\operatorname{Im} \rho_n| \leqslant T+1$ 的 ζ 函数的零点 ρ_n 的个数不超过 $c_4 \log T$.

推论 2. 设 $T \geqslant 2$，则有估计

$$\sum_{|T-\gamma_n|>1} \frac{1}{|T-\gamma_n|^2} = O(\log T).$$

推论 3. 当 $-1 \leqslant \sigma \leqslant 2$，$s = \sigma + it$，$|t| \geqslant 2$ 时，有

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|t-\gamma_n| \leqslant 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\log |t|).$$

这里和号是表示对于满足 $|t - \operatorname{Im} \rho_n| \leqslant 1$ 的 $\zeta(s)$的零点 ρ_n 求和.

证. 因为当 $s = \sigma + it$，$|t| \geqslant 2$，$-1 \leqslant \sigma \leqslant 2$ 时，估计式 (5) 成立，所以

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + O(\log |t|).$$

从这个式子中减去当 $s = 2 + it$ 时的同一个式子：

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n}\right) + O(\log |t|).$$

如果 $|\gamma_n - t| > 1$，那么

$$\left|\frac{1}{\sigma + it - \rho_n} - \frac{1}{2 + it - \rho_n}\right| \leqslant \frac{2 - \sigma}{(\gamma_n - t)^2} \leqslant \frac{3}{(\gamma_n - t)^2},$$

由推论 2 就得到推论 3 的断言.

定理 5 (de la Vallée Poussin). 存在绝对常数 $c > 0$，使得在 s 平面的区域:

$$\operatorname{Re} s = \sigma > 1 - \frac{c}{\log(|t| + 2)}$$

内没有 ζ 函数的零点.

证. 我们首先证明，对于任意的 $\gamma_0 > 0$，可以找到正常数 $c_0 = c_0(\gamma_0)$，使得：如果 ρ 是 ζ 函数的零点，$\rho = \beta + i\gamma$，$|\gamma| \geqslant \gamma_0$，那么

$$\beta \leqslant 1 - \frac{c_0}{\log(|\gamma| + 2)}.$$

设 φ 是实数，那么

$$3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi = 2(1 + \cos\varphi)^2 \geqslant 0. \tag{6}$$

当 $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ 时，

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} e^{-it\log n},$$

及

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \cos(t\log n).$$

由此及式 (6)，有

$$3\left\{-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right\} + 4\left\{-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)}\right\} + \left\{-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)}\right\} \geqslant 0. \tag{7}$$

当 $s \neq \rho$，ρ 是 $\zeta(s)$ 的零点时，由定理 3 得到

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s - 1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)-B_0.$$

因此，当 $1<\sigma\leqslant 2$ 时，存在绝对常数 $B_1>0$，使得

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}<\frac{1}{\sigma-1}+B_1. \tag{8}$$

当 $|t|\geqslant t_0>0$，$1<\sigma\leqslant 2$ 时，存在 $A=A(t_0)>0$，使得

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}<A\log(|t|+2)-\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right). \tag{9}$$

此外，如果 $\zeta(\rho)=0$，那么 $\mathrm{Re}\,\rho=\beta\leqslant 1$，并且当 $\mathrm{Re}\,s>1$ 时，

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{s-\rho}=\mathrm{Re}\,\frac{1}{(\sigma-\beta)+i(t-\gamma)}$$

$$=\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}>0.$$

设 $t=\gamma$ 是零点 ρ 的纵坐标，那么从式(9)，有

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}<A\log(|t|+2)-\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}$$

$$=A\log(|t|+2)-\frac{1}{\sigma-\beta} \tag{10}$$

及

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}<A\log(|t|+2). \tag{11}$$

从式(7)，(8)，(10)，(11)得到

$$\frac{3}{\sigma-1}+A_1\log(|t|+2)-\frac{4}{\sigma-\beta}\geqslant 0,\quad A_1>0.$$

现在如果取

$$\sigma=1+\frac{c_1}{\log(|t|+2)},\qquad \beta=1-\frac{c_1}{7\log(|t|+2)},$$

那么从最后的那个不等式得到

$$c_1\geqslant\frac{1}{2A_1}.$$

因为 $s=1$ 是 $\zeta(s)$ 的极点，所以从已经证明的结果推出定理的断言.

推论. 设 $T\geqslant 2$，$c>0$ 是定理中的绝对常数，则在区域

$$\sigma\geqslant 1-\frac{c}{2\log(|T|+2)},\quad |t|\leqslant T$$

内有估计

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|=O(\log^2 T).$$

证. 根据定理 4 的推论 3，

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{|t-\gamma_n|\leqslant 1}\frac{1}{s-\rho_n}+O(\log T),$$

因此

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|\leqslant\sum_{|t-\gamma_n|\leqslant 1}\frac{1}{|\sigma-\beta_n+i(t-\gamma_n)|}+O(\log T).$$

因为

$$\beta_n\leqslant 1-\frac{c}{\log(T+2)},\quad \sigma\geqslant 1-\frac{c}{2\log(T+2)},$$

所以

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|\leqslant\frac{2}{c}\log(T+2)\sum_{|t-\gamma_n|\leqslant 1}1+O(\log T)=O(\log^2 T)$$

这就是所要证明的.

§5. 有穷和的逼近

为了解决一系列数论问题，要求在临界带形内估计 $\zeta(s)$. 因此，我们用在 $\mathrm{Re}\, s>1$ 内定义的 $\zeta(s)$ 的级数的部分和来逼近它，然后估计这个和. 下面我们将得到 $\zeta(s)$ 最简单的逼近. 我们先证明两个辅助引理. 这两个引理有它独立的意义，并且在数论中常常应用.

引理 3 (Abel 变换). 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续可微的，c_n 是任意复数，

$$\mathrm{C}(x) = \sum_{a<x\leqslant b} c_n,$$

则

$$\sum_{a<n\leqslant b} c_n f(n) = -\int_a^b \mathrm{C}(x) f'(x)\,dx + \mathrm{C}(b) f(b).$$

证.

$$\mathrm{C}(b)f(b) - \sum_{a<n\leqslant b} c_n f(n) = \sum_{a<n\leqslant b} c_n (f(b) - f(n))$$

$$= \sum_{a<n\leqslant b} \int_n^b c_n f'(x)\,dx = \sum_{a<n\leqslant b} \int_a^b c_n g(n;x) f'(x)\,dx,$$

其中

$$g(n;x) = \begin{cases} 1, & n \leqslant x \leqslant b; \\ 0, & x < n. \end{cases}$$

在最后的和式中改变求和与积分的次序，并注意到

$$\sum_{a<n\leqslant b} c_n g(n;x) = \sum_{a<n\leqslant x} c_n = \mathrm{C}(x),$$

我们便得到引理的断言.

引理 4. 设 $f(x)$ 是实函数，在 $[a, b]$ 上有连续、单调的导数，且

$$|f'(x)| \leqslant \delta < 1.$$

则

$$\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\,dx + O\left(\frac{1}{1-\delta}\right),$$

其中大 O 常数是绝对常数.

证. 不失一般性，可以假定在 $[a, b]$ 上 $f'(x) \geqslant 0$. 考虑函数

$$F_n(x) = e^{2\pi i f(n+x)},\ 0 < x < 1.$$

设

$$F_n(0) = F_n(1) = \frac{e^{2\pi i f(n)} + e^{2\pi i f(n+1)}}{2},$$

并把它周期地开拓到整个直线上，使其周期为 1，这样

$$F_n(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{2\pi i m x},$$

其中 ($m \neq 0$)

$$\begin{aligned} c_m = c_m(n) &= \int_0^1 F_n(x) e^{-2\pi i m x} dx \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i (f(n+x)-mx)} dx \\ &= -e^{2\pi i f(n+x)} \frac{e^{2\pi i m x}}{2\pi i m}\Big|_0^1 \\ &\quad - \frac{1}{m}\int_0^1 f'(n+x) e^{2\pi i (f(n+x)-mx)} dx, \end{aligned}$$

$$c_0 = \int_0^1 e^{2\pi i f(n+x)} dx.$$

因此，当 $x = 1$ 时，

$$\begin{aligned} \frac{e^{2\pi i f(n)} + e^{2\pi i f(n+1)}}{2} &= \int_0^1 e^{2\pi i f(n+x)} dx + \sum_{m\neq 0} c_m(n) \\ &= \int_n^{n+1} e^{2\pi i f(x)} dx - \sum_{m\neq 0} \frac{1}{m} \int_n^{n+1} f'(x) e^{2\pi i (f(x)-mx)} dx. \end{aligned}$$

等式的两边按 $n(a < n < b)$ 求和，得到

$$\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx - \sum_{m\neq 0} \frac{1}{m} U_m + O(1), \qquad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} U_m &= \int_{[a]+1}^{[b]} f'(x) e^{2\pi i (f(x)-mx)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{[a]+1}^{[b]} \frac{f'(x)}{f'(x)-m}\, d e^{2\pi i (f(x)-mx)}. \end{aligned}$$

对于最后这个积分的实部与虚部应用中值定理（如果 $g(x)$，$h(x)$ 是 Riemann 可积的，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调的，则存在 $\xi \in [a, b]$，使得

$$\int_a^b g(x) h(x) dx = g(a)\int_a^\xi h(x) dx + g(b)\int_\xi^b h(x) dx),$$

我们得到

$$U_m = O\left(\frac{1}{|m| - \delta}\right).$$

从式（12）与 U_m 的估计推出引理的断言。

定理 6. 当 $0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 2$，$x \geqslant \frac{|t|}{\pi}$ 时，公式

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-\sigma})$$

成立，其中大 O 常数只依赖于 σ_0。

证. 根据引理 1 ($N > x$)，

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2} N^{-s} + s\int_N^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \{u\}}{u^{s+1}} du. \tag{13}$$

最后一项是

$$O(|t| N^{-\sigma}).$$

考虑和

$$\sum_{x < n \leqslant N} \frac{1}{n^{it}} \cdot \frac{1}{n^{\sigma}}.$$

对于这个和应用引理 3：设 $c_n = \frac{1}{n^{it}}$，$f(x) = x^{-\sigma}$，并应用引理 4 来计算

$$C(u) = \sum_{x < n \leqslant u} c_n,$$

我们得到

$$C(u) = \int_x^u v^{-it} dv + O(1) = \frac{u^{1-it} - x^{1-it}}{1-it} + O(1);$$

$$\sum_{x < n \leqslant N} \frac{1}{n^s} = \sigma \int_x^N u^{-\sigma-1} C(u) du + C(N) N^{-\sigma}$$

$$= \sigma \int_x^N \frac{u^{-s} - u^{-\sigma-1} x^{1-it}}{1-it} du + O(xN^{-\sigma}) + \frac{N^{1-\sigma-it}}{1-it}$$

$$= \frac{N^{1-s}}{1-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(xN^{-\sigma}) + O(x^{-\sigma}).$$

由此及式(13)，令$N\to+\infty$就得定理的断言。

问　　题

1. 设$f(x)$是实函数，在区间$[a,b]$上具有连续的、单调递减的导数，并设$f'(b)=\alpha$，$f'(a)=\beta$. 则(ν是整数)

$$\sum_{a<n\leqslant b}e^{2\pi i f(n)}=\sum_{\alpha-\eta<\nu<\beta+\eta}\int_a^b e^{2\pi i(f(x)-\nu x)}dx+O(\ln(\beta-\alpha+2)),$$

其中$0<\eta<1$是任意的，大O常数依赖于η(引理4的推广).

2. 设$f(x)$是三次连续可微的实函数，$f'(x)$在区间$[a,b]$上单调递减，并且$f'(b)=\alpha$，$f'(a)=\beta$，数x_ν是由等式

$$f'(x_\nu)=\nu\quad(\alpha<\nu\leqslant\beta)$$

所确定的，此外还有

$$|f''(x)|\asymp A,\quad |f'''(x)|<B\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

则

$$\sum_{a<n\leqslant b}e^{2\pi i f(n)}=e^{-\frac{\pi i}{4}}\sum_{\alpha<\nu\leqslant\beta}\frac{e^{2\pi i(f(x_\nu)-\nu x_\nu)}}{\sqrt{|f''(x_\nu)|}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)+O(\ln\{2+(b-a)A\})+O\{(b-a)(AB)^{\frac{1}{5}}\}.$$

3. 设$h>0$，$2\pi xy=|t|$，$x>h>0$，$y>h>0$，则当$0\leqslant\sigma\leqslant1$时，

$$\zeta(s)=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s}+\chi(s)\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n^{1-s}}+O(x^{-\sigma}\ln|t|)+O(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}y^{\sigma-1}),$$

其中

$$\chi(s)=\frac{2^{s-1}\pi^s}{\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)}$$

(与定理6比较).

4. (А.Ф. Лаврик) 证明：如果$|\arg\tau|<\pi/2$，则

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2},\ \pi\tau n^2\right)}{n^s}+\pi^{s-\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2},\ \frac{\pi n^2}{\tau}\right)}{n^{1-s}}$$

$$-\pi^{\frac{1}{2}}\frac{(\pi\tau)^{\frac{s-1}{2}}}{1-s}-\frac{(\pi\tau)^{\frac{s}{2}}}{s}, \tag{14}$$

其中 $\Gamma(z, x)$ 是不完全 Γ 函数，

$$\Gamma(z, x)=\int_x^{\infty} e^{-\xi}\xi^{z-1}d\xi$$

（考虑函数 $f(z)=\pi^{-\frac{z}{2}}\tau^{\frac{1}{2}-z}(s-z)^{-1}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$沿垂直线 $\operatorname{Re} z=c>\max(1, \operatorname{Re} s)$ 的积分）。

5. 从式（14）推出：

a) $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$;

b) $\theta\left(\frac{1}{\tau}, 0\right)=\tau^{\frac{1}{2}}\theta(\tau, 0)$;

c) 设 $h>0$，$2\pi xy=|t|$，$x>h$，$y>h$，$K>0$，则当 $-K<\sigma<K$ 时，

$$\zeta(s)=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s}+\pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n^{1-s}}$$
$$+O(x^{-\sigma})+O(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}y^{\sigma-1})$$

（$\zeta(s)$ 的渐近函数方程）。

第四章　Dirichlet 级数的系数和与此级数所给定的函数之间的联系

证明本章定理的方法称为复积分法.

§1. 一 般 定 理

定义 1. 表达式

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s} \tag{1}$$

称为 Dirichlet 级数，其中 a_n 是复数（Dirichlet 级数的系数），$s=\sigma+it$.

我们考虑函数 $\Phi(x)=\sum_{n\leqslant x}a_n$. 在级数（1）满足一定条件时，函数 $\Phi(x)$ 可以通过 $f(s)$ 表示出来.

定理 1. 设 $f(s)$ 的级数（1）当 $\sigma>1$ 时绝对收敛，$|a_n|\leqslant A(n)$，这里 $A(n)>0$ 是 n 的单调增函数，且当 $\sigma\to1+0$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|n^{-\sigma}=O((\sigma-1)^{-\alpha}),\ \alpha>0.$$

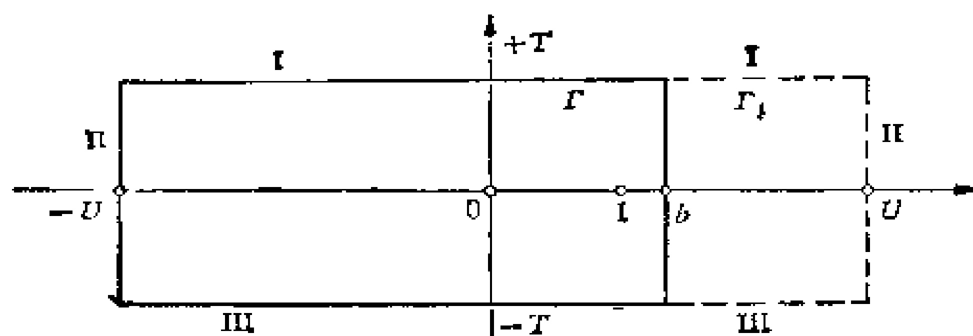
那么，对于任意的 $b_0\geqslant b>1$，$T\geqslant1$，$x=N+\frac{1}{2}$ 有公式:

$$\Phi(x)=\sum_{n\leqslant x}a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}f(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^{\alpha}}\right)$$
$$+O\left(\frac{xA(2x)\log x}{T}\right),$$

其中大 O 常数仅依赖于 b_0.

证. 首先，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s}{s}\,ds=\begin{cases}1+O\left(\dfrac{a^b}{T\,|\log a|}\right), & a>1;\\ O\left(\dfrac{a^b}{T\,|\log a|}\right), & 0<a<1.\end{cases} \tag{2}$$



事实上，设 $a>1$ $(0<a<1)$． 取 $U>b$ 并考虑相应的围道 $\Gamma(\Gamma_1)$（见图）．

根据 Canchy 定理，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{a^s}{s}\,ds=1\quad(a>1)$$

及相应的

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{a^s}{s}\,ds=0\quad(0<a<1),$$

即

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s}{s}\,ds&=1+R\quad(a>1),\\ \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s}{s}\,ds&=R_1\quad(0<a<1),\end{aligned} \tag{3}$$

其中 R 和 R_1 是在边 I，II，III 上相应的积分． 在 I 和 III 上的积分，绝对值是相等的．因此，如果 $a>1$，那么

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{I}\frac{a^s}{s}\,ds\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-U}^{b}\frac{a^\sigma}{\sqrt{T^2+\sigma^2}}\,d\sigma\leqslant\frac{a^b}{T\log a};$$

如果 $0<a<1$，那么

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_I \frac{a^s}{s}ds\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_b^U \frac{a^\sigma d\sigma}{\sqrt{T^2+\sigma^2}} \leqslant \frac{a^b}{T|\log a|}.$$

此外,如果 $a>1$，则当 $U\to+\infty$ 时，

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{II} \frac{a^s}{s}\ ds\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T} \frac{a^{-U}}{\sqrt{U^2+t^2}}\ dt = O(a^{-U}) \to 0;$$

如果 $0<a<1$，则当 $U\to+\infty$ 时，

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{II} \frac{a^s}{s}ds\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T} \frac{a^U}{\sqrt{U^2+t^2}}\ dt = O(a^U) \to 0.$$

在式(3)中令 $U\to+\infty$ 求极限得到式(2)。因为 $x=N+\frac{1}{2}$，所以当 n 是自然数时，$\frac{x}{n}\neq 1$。级数(1)当 $s=b+it$ 时一致收敛。对它逐项积分得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} f(s)\frac{a^s}{s}ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\right)$$
$$= \sum_{n\leqslant x} a_n + R,$$

其中

$$R = O\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^b}{T\left|\log\frac{x}{n}\right|}\right).$$

我们把 O 项中的和分为两部分：第一部分是满足 $\frac{x}{n}\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $\frac{x}{n}\geqslant 2$ 的那些项；对于这些项，$\left|\log\frac{x}{n}\right|\geqslant\log 2$。又因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^b} = O\left(\frac{1}{(b-1)^\alpha}\right),$$

所以第一个和是

$$O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^\alpha}\right);$$

第二和是

$$\sum_{\frac{x}{2}<n<2x} |a_n| \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^b}{T\left|\log\frac{x}{n}\right|} \leqslant \frac{A(2x)2^b}{T} \sum_{\frac{x}{2}<n<2x} \frac{1}{\left|\log\frac{N+\frac{1}{2}}{n}\right|};$$

进而，因为 $\log\frac{N+\frac{1}{2}}{n} \geqslant c_1 \frac{N+\frac{1}{2}-n}{N}$，若 $\frac{N}{2}<n\leqslant N$；

$\log\frac{n}{N+\frac{1}{2}} \geqslant c_2 \frac{n-N-\frac{1}{2}}{N+\frac{1}{2}}$，若 $N+1\leqslant n<2x$，所以

$$\begin{aligned}
\sum_{\frac{x}{2}<n<2x} \frac{1}{\left|\log\frac{N+\frac{1}{2}}{n}\right|} &= \sum_{\frac{x}{2}<n\leqslant N} \frac{1}{\log\frac{N+\frac{1}{2}}{n}} + \sum_{N+1\leqslant n<2x} \frac{1}{\log\frac{n}{N+\frac{1}{2}}} \\
&= O\left(\sum_{\frac{x}{2}<n\leqslant N} \frac{n}{N+\frac{1}{2}-n}\right) \\
&\quad + O\left(\sum_{N+1\leqslant n\leqslant 2x} \frac{N}{n-N-\frac{1}{2}}\right) \\
&= O(x\log x).
\end{aligned}$$

由所得到的这些估计便推出定理的断言.

§2. 素数分布的渐近公式

$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$ 或者与它等价的 $\psi(x)\sim x$ 称为素数分布的渐近公式。现在我们将证明比这更强的断言。

定理 2 (de la Vallée Poussin). 存在绝对常数 $c>0$，使得

$$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)=x+O(xe^{-c\sqrt{\ln x}});$$

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}).$$

证. 当 $\mathrm{Re}\, s > 1$ 时，有

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

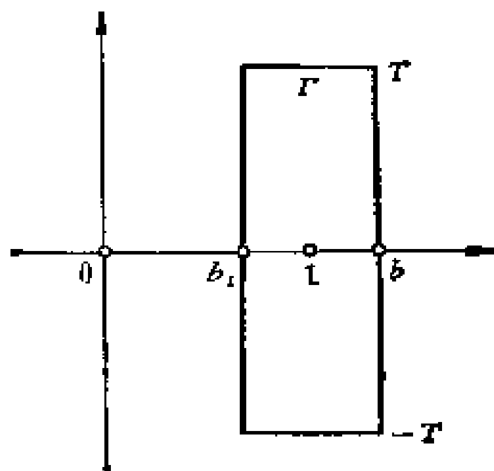
不失一般性，我们将假定 $x = N + \frac{1}{2} \geqslant 100$. 应用定理 1，由第三章的结果知道，在定理 1 中可以取 $\alpha = 1$, $A(n) = \log n$. 现在取

$$b = 1 + \frac{1}{\log x}, \quad T = e^{\sqrt{\log x}}.$$

那么

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right).$$

根据第三章定理 5 及其推论，有绝对常数 $c_1 > 0$，使得 $\zeta(s)$ 在区域



$$\operatorname{Re}s=\sigma>\sigma_1=1-\frac{c_1}{2\log(T+2)},\quad |t|\leqslant T$$

内没有零点，且 $\zeta'(s)/\zeta(s)=O(\log^2 T)$. 考虑沿围道 Γ（见图）的积分

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds.$$

被积函数在围道内部有一个一阶极点，其留数为 x，所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds=x+R,$$

其中 R 是在 Γ 的上、下和左三边上的积分，我们来估计这些积分，头两个积分的绝对值相等，并且有估计

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1+iT}^{b+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds\right|\leqslant\int_{\sigma_1}^{b}\left|\frac{\zeta'(\sigma+iT)}{\zeta(\sigma+iT)}\right|\frac{x^\sigma}{T}\,d\sigma$$

$$=O\left(\frac{x\log^2 T}{T}\right);$$

在左边上的积分等于

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-iT}^{\sigma_1+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{+T}\frac{\zeta'(\sigma_1+it)}{\zeta(\sigma_1+it)}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{x^{\sigma_1+it}}{\sigma_1+it}\,dt\right|$$

$$=O\left(x^{\sigma_1}\log^2 T\cdot\left(\int_0^1\frac{1}{\sigma_1}\,dt+\int_1^T\frac{1}{t}\,dt\right)\right)=O(x^{\sigma_1}\log^3 T).$$

从所得到的估计及 T，σ_1 的定义推出定理的第一个断言.

我们考虑

$$S=\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{\log n}=\sum_{p\leqslant x}1+\sum_{\substack{n=p^k\leqslant x\\ k\geqslant 2}}\frac{\Lambda(n)}{\log n}.$$

在第二个和中，$k\leqslant\log x$，以及在这个和中对应于每一个固定的 $k\geqslant 2$的 项数$\leqslant\sqrt{x}$，且每一项不超过 1. 因此

$$S=\pi(x)+O(\sqrt{x}\log x).\tag{4}$$

在第三章中的引理 3 中，设

$$c_n = \Lambda(n), \quad f(x) = \frac{1}{\log x},$$

即

$$C(x) = \sum_{n \leqslant x} c_n = \psi(x) = x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}),$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x\log^2 x},$$

我们得到

$$S = \int_2^x \frac{\psi(u)}{u\log^2 u} du + \frac{\psi(x)}{\log x} = \int_2^x \frac{1}{\log^2 u} du + \frac{x}{\log x} + R,$$

其中

$$R = O\left(\int_2^x e^{-c\sqrt{\log u}} \frac{1}{\log^2 u} du + xe^{-c\sqrt{\log x}}\right)$$

$$= O\left(\int_2^{\sqrt{x}} du + \int_{\sqrt{x}}^x e^{-c\sqrt{\log u}} du + xe^{-c\sqrt{\log x}}\right)$$

$$= O(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log x}})$$

以及

$$\int_2^x \frac{1}{\log^2 u} du + \frac{x}{\log x} = -\frac{u}{\log u}\bigg|_2^x + \int_2^x \frac{1}{\log u} du + \frac{x}{\log x}$$

$$= \int_2^x \frac{1}{\log u} du + \frac{2}{\log 2}.$$

由此与式 (4) 推出定理的第二个断言.

§ 3. Чебышев 函数表为 ζ 函数的零点和

利用复积分法可以给出一些联系 ζ 函数的零点与各种对素数求和的和式的公式，这些公式通常称为显式. 现在证明其中的一个.

定理 3. 设 $2 \leqslant T \leqslant x$，则

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = x - \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right),$$

其中 ρ 是 ζ 函数在临界带形内的零点.

证. 根据第三章定理 3，当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时，

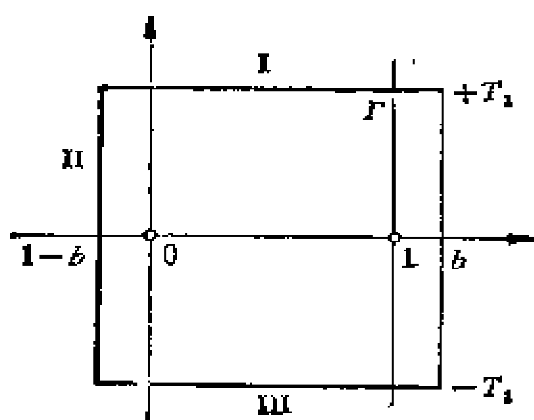
$$
\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \\
&= \frac{1}{s-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) - B_0, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

其中 ρ_n 是 $\zeta(s)$ 所有的非显然零点. 与证明定理 1 一样 $\left(b = 1 + \frac{1}{\log x}\right)$,

$$
\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT_1}^{b+iT_1}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right), \qquad (6)
$$

其中 $T \leqslant T_1 \leqslant T+1$，并取 T_1 使得直线 $\operatorname{Im} s = T_1$ 到 $\zeta(s)$ 最近的零点的距离

$$
\gg \frac{1}{\log T}
$$



(这总是可以做到的，因为由第三章定理 4 的推论 1，$\zeta(s)$ 在 $T \leqslant \operatorname{Im}\rho \leqslant T+1$ 的零点数是 $O(\log T)$)。 考虑积分 J，

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds$$

其中 Γ 是矩形围道(见图)。根据 Cauchy 定理和式 (5)，

$$J = x - \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T_1}\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}. \tag{7}$$

剩下的是要估计在 Γ 的边 I，II，III 上的积分。在 I 和 III 上的积分，其绝对值是相等的，且有估计

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{1-b+iT_1}^{b+iT_1}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds\right| < \frac{x}{T_1}\int_{1-b}^{b}\left|\frac{\zeta'(\sigma+iT_1)}{\zeta(\sigma+iT_1)}\right|d\sigma. \tag{8}$$

在 II 上的积分不超过

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{1-b-iT_1}^{1-b+iT_1}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds\right|$$

$$< x^{1-b}\int_{-T_1}^{T_1}\left|\frac{\zeta'(1-b+it)}{\zeta(1-b+it)}\right|\frac{dt}{\dfrac{1}{\log x}+|t|}. \tag{9}$$

我们来估计

$$\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right|,$$

其中 $1-b \leqslant \sigma \leqslant b$，$t = T_1$ 或者 $\sigma = 1-b = -\frac{1}{\log x}$，$|t| \leqslant T_1$。 根据第四章定理 4 的推论 3，

$$\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} = \sum_{|t-\gamma_n|\leqslant 1}\frac{1}{(\sigma-\sigma_n)+i(t-\gamma_n)} + O(\log(|t|+2)).$$

上面的和式是

$$O(\log^2 x),$$

因为如果 $|t| \leqslant T_1$，那么 $\sigma = -\frac{1}{\log x}$，$\zeta(s)$ 满足 $|t-\gamma_n| \leqslant 1$ 的零点不超过 $O(\log(|t|+2))$； 如果 $t = T_1$，$1-b \leqslant \sigma \leqslant b$，

那么由于 T_1 的选取，有

$$|T_1 - \gamma_n| \gg \frac{1}{\log T}.$$

从已经得到的估计 (8)，(9) 和 (7) 便推出定理的断言。

问　　题

1. 证明：

$$M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) = O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

2. 为使 $\zeta(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}s > \gamma, \frac{1}{2} < \gamma < 1$ 内没有零点，必需而且只需下面的关系式之一成立：

a) $\psi(x) = x + O(x^{\gamma+\varepsilon})$;

b) $\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x^{\gamma+\varepsilon})$;

c) $M(x) = O(x^{\gamma+\varepsilon})$,

其中 ε 是任意小的正数.

3. (Ю. В. Линник) 设 $0 \leqslant \alpha < 1$，$N \geqslant 2$，那么

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\frac{n}{N}} e^{-2\pi i\alpha n} \Lambda(n) = \frac{1}{x} - \sum_{\rho_k} x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k) + O(\log^5 N),$$

其中 ρ_k 是 $\zeta(s)$ 的零点，$x = \frac{1}{N} + 2\pi i\alpha$.

4. 设 $\psi_0(x) = \frac{1}{2}(\psi(x+0) + \psi(x-0))$，证明当 $x \geqslant 2$ 时，

$$\psi_0(x) = x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

5. a) 设 $r(n)$ 是方程 $\varphi(k) = n$ 的解数，则

$$\sum_{n \leqslant x} r(n) = c_0 x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

$\left(考虑 \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{\varphi^s(p)} + \frac{1}{\varphi^s(p^2)} + \cdots\right),\right.$

$\left.\operatorname{Re} s > 1\right).$

b）证明

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\varphi(n)} = c_0 \ln x + O(\ln \ln x).$$

6. 设 $x > 2$，则

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = c_1 + \ln \ln x + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{c_2}{\ln x} + O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right).$$

第五章　ζ 函数理论中的 Виноградов 方法

在这一章里将证明 И. М. Виноградов 的中值定理以及在此基础上估计 $\zeta(s)$ 在直线 $\operatorname{Re} s = 1$ 附近的阶．后面(第六章)我们将利用这个估计进一步改进 $\zeta(s)$ 零点边界．

§1．三角和的模的中值定理

量 J，

$$J = J_{k,n}(P) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x \leqslant P} e^{2\pi i(\alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n)} \right|^{2k} d\alpha_1 \cdots d\alpha_n,$$

称为三角和的模的中值．在一系列数论问题中，重要的是知道 J 随 P 的增长而增长的阶(中值定理)．

我们证明若干辅助命题．

引理 1． 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是整数，$J_{k,n}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 是方程组

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k - x_{k+1} - \cdots - x_{2k} = \lambda_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n - x_{k+1}^n - \cdots - x_{2k}^n = \lambda_n, \end{cases} \tag{1}$$

$$1 \leqslant x_1, \cdots, x_{2k} \leqslant P$$

的解数，则下列关系式成立：

a) $J_{k,n}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x \leqslant P} e^{2\pi i(\alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n)} \right|^{2k} e^{-2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n)} d\alpha_1 \cdots d\alpha_n;$$

b) $J_{k,n}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \leqslant J_{k,n}(0, 0, \cdots, 0) = J_{k,n}(P) = J;$

c) $\sum\limits_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} J_{k,n}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = P^{2k};$

d) $|\lambda_1| < kP, \cdots, |\lambda_n| < kP^n;$

e) $J = J_{k,n}(P) > (2k)^{-n}P^{2k-\frac{n^2+n}{2}}$;

f) 如果 $x_1^{(0)},\cdots,x_{2k}^{(0)}$ 满足当 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$ 时的方程组(1)，那么，对于任意的 A，$x_1^{(0)}+A,\cdots,x_{2k}^{(0)}+A$ 也满足当 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$ 时的方程组(1)。

证. 当 λ 是整数时，

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha\lambda}d\alpha=\begin{cases}1, & \lambda=0;\\ 0, & \lambda\neq 0.\end{cases}$$

因此，如果将被积函数中的模的 $2k$ 次幂乘开来，并对所有的 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 积分便推出 a)；b) 由于积分的模不超过被积函数的模的积分而得到；c) 中的等式的左边是方程组(1)的一切可能选取的 $x_1,x_2,\cdots,x_{2k}$ 的组数，即 P^{2k}，由此推出 c)；d) 由 $x_1,x_2,\cdots,x_{2k}$ 所满足的条件推出；e) 由c)，b) 及 d) 推出；如果将 $x_1^{(0)}+A,\cdots,x_{2k}^{(0)}+A$ 依次地代入方程组(1)的第一个方程，第二个方程，……，最后一个方程，便得到 f)。引理证毕。

引理 2. 设 $n\geqslant 1$，$m\geqslant 1$，p 是素数，$p>n$。又设 T 是同余方程组

$$\begin{cases}x_1+\cdots+x_n\equiv\mu_1 \pmod{p},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_1^n+\cdots+x_n^n\equiv\mu_n \pmod{p^n},\end{cases}\tag{2}$$

满足条件：$A\leqslant x_r\leqslant A+mp^n-1$，$r=1,2,\cdots,n$，这里 A 是整数，以及当 $i\neq j$ 时，

$$x_i\not\equiv x_j \pmod{p}$$

的解的个数。那么，对于任意固定的 $\mu_1,\cdots,\mu_n$，

$$T\leqslant n!\,m^n p^{\frac{n^2-n}{2}}.$$

证. 如果数 $x_1,\cdots,x_n$ 满足同余方程组(2)，且 $x_1\equiv y_1 \pmod{p^n},\cdots,x_n\equiv y_n \pmod{p^n}$，那么数 $y_1,\cdots,y_n$ 也满足同余方程组(2)。因此可以设 $A=0$。将 x_r 写成下面的形式：

$$x_r=x_{r1}+px_{r2}+\cdots+p^{n-1}x_{rn}+p^n x_{rn+1},$$

其中 $0\leqslant x_{r\nu}<p$，$\nu=1,2,\cdots,n$，$0\leqslant x_{rn+1}<m$。我们来找出

数 $x_{r1}, x_{r2}, \cdots, x_{rn}, x_{rn+1}$ 所要满足的必要条件.

要使数 $x_1, \cdots, x_n$ 满足同余方程组 (2)，必需使 $x_1, \cdots, x_n$ 满足同样的方程组 $\bmod p$，即必需有

$$\begin{cases} x_{11} + \cdots + x_{n1} \equiv \mu_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{11}^n + \cdots + x_{n1}^n \equiv \mu_n. \end{cases} \pmod p. \tag{3}$$

如果 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是 $x_{11}, \cdots, x_{n1}$ 的初等对称函数，那么，对模 p 来说，$s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是由 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 所唯一确定的.设 $f(x) = x^n - s_1x^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n$. 如果 $x_{11}, \cdots, x_{n1}$ 满足式 (3)，那么 $x_{11}, \cdots, x_{n1}$ 是同余方程 $f(x) \equiv 0 \pmod p$ 的根；但是这个同余方程的根数不大于 n，即 (3) 的解数不大于 $n!$. 其次，如果已经得到了这些 x_r 的前 $\nu - 1(\nu \leqslant n)$ 个坐标的必要条件，我们考虑同余方程组

$$\begin{cases} x_1^\nu + \cdots + x_n^\nu \equiv \mu_\nu, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n + \cdots + x_n^n \equiv \mu_n, \end{cases} \pmod{p^\nu}.$$

并且设

$$x_{r1} + px_{r2} + \cdots + p^{\nu-2}x_{r\nu-1} = u_{r\nu-1}.$$

于是

$x_r \equiv u_{r\nu-1} + p^{\nu-1}x_{r\nu} \pmod{p^\nu}$, $x_r^k \equiv u_{r\nu-1}^k + ku_{r\nu-1}^{k-1}p^{\nu-1}x_{r\nu} \pmod{p^\nu}$,

并且 $\sum\limits_{r=1}^{n} u_{r\nu-1}^k \equiv \mu_k \pmod{p^{\nu-1}}$, $k = \nu, \cdots, n$. 因此对于 $x_{r\nu}$ 得到同余方程组

$$\begin{cases} u_{1\nu-1}^{\nu-1}x_{1\nu} + \cdots + u_{n\nu-1}^{\nu-1}x_{n\nu} \equiv \mu'_\nu, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{1\nu-1}^{n-1}x_{1\nu} + \cdots + u_{n\nu-1}^{n-1}x_{n\nu} \equiv \mu'_n. \end{cases} \pmod p.$$

因为 $\nu \geqslant 2$, $u_{r\nu-1} \equiv x_{r1} \pmod p$, $r = 1, 2, \cdots, n$, 所以必有 $n - \nu + 1$ 个数 $u_{j\nu-1}$, 使得 $u_{j\nu-1} \not\equiv 0 \pmod p$, $u_{j\nu-1} \not\equiv u_{i\nu-1} \pmod p$, $i \neq j$. 这样，当任意选取 $\nu - 1$ 个相应的 $x_{r\nu}$ 后，其余的 $n - \nu + 1$ 个 $x_{r\nu}$ 的值就由这同余方程组唯一确定（同余方程组的行列式 $\not\equiv$

0 (mod p)),即这个同余方程组的解数不超过 p^{n-1}. 由于 x_{n+1} 可以是任意的,所以

$$T \leqslant n!\,p\cdots p^{n-1}m^n = n!\,m^n p^{\frac{n^2-n}{2}}.$$

引理证毕.

引理 3. 设 $u_\nu, v_\nu \geqslant 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, 则

$$\sum_{\nu=1}^{P} u_\nu v_\nu \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{P} u_\nu^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \left(\sum_{\nu=1}^{P} v_\nu^{\frac{1}{\beta}}\right)^\beta$$

(Hölder 不等式).

证. 当 $x \geqslant 1$ 时,有

$$x^\alpha \leqslant \alpha x + \beta,$$

因为函数 $x^\alpha - \alpha x - \beta$ 是减函数. 因此,对于 $a, b \in [0, 1]$, 我们得到

$$a^\alpha b^\beta \leqslant \alpha a + \beta b.$$

令

$$a = \frac{u_\nu^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum\limits_{\nu=1}^{P} u_\nu^{\frac{1}{\alpha}}}, \qquad b = \frac{u_\nu^{\frac{1}{\beta}}}{\sum\limits_{\nu=1}^{P} u_\nu^{\frac{1}{\beta}}}.$$

便得到引理的断言.

推论.

1. Cauchy 不等式:

$$\left(\sum_{\nu=1}^{P} u_\nu v_\nu\right)^2 \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{P} u_\nu^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{P} v_\nu^2\right);$$

2. $\left(\sum\limits_{\nu=1}^{P} u_\nu v_\nu\right)^k \leqslant \left(\sum\limits_{\nu=1}^{P} u_\nu\right)^{k-1} \sum\limits_{\nu=1}^{P} u_\nu v_\nu^k;$

3. $\left(\sum\limits_{\nu=1}^{P} u_\nu\right)^k \leqslant P^{k-1} \sum\limits_{\nu=1}^{P} u_\nu^k.$

引理 4. 设 $n \geqslant 2$, $P \geqslant (2n)^{3n}$, $k \geqslant n^2 + n$, 则 $J = J_{k,n}(P)$ 满足不等式

$$J_{k,n}(P) \leqslant 4^{2k} P^{\frac{2k}{n}+\frac{3n-5}{2}} J_{k-n,n}(P_1),$$

其中

$$P^{1-\frac{1}{n}} \leqslant P_1 \leqslant 4P^{1-\frac{1}{n}}.$$

证. 我们将利用初等数论中的下述命题：当 $N \geqslant 2$ 时，在区间 $[N, 2N]$ 内总有素数。从 P 和 n 的条件推出，在区间 $\left[\frac{1}{2}P^{\frac{1}{n}}, P^{\frac{1}{n}}\right]$ 内必有素数 p，$p > n$。设 $P_1 = \left[\frac{P}{p}\right] + 1$，那么 $P < pP_1$，$J_{k,n}(P) \leqslant J_{k,n}(pP_1)$。$J_{k,n}(pP_1)$ 等于方程组

$$\begin{cases}(x_1 + py_1) + \cdots - (x_{2k} + py_{2k}) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x_1 + py_1)^n + \cdots - (x_{2k} + py_{2k})^n = 0\end{cases} \tag{4}$$

$$1 \leqslant x_r \leqslant p,\ 0 \leqslant y_r < P_1,\ r = 1, 2, \cdots, 2k,$$

的解数．这个方程组的所有解可分为两类：归入第一类的解 x_1，y_1，$\cdots$，x_{2k}，y_{2k} 是既在 $x_1, \cdots, x_k$ 中又在 $x_{k+1}, \cdots, x_{2k}$ 中有 n 个不同的数的解，所有其他的解归入第二类．用 J_1，J_2 分别表示第一类和第二类解的个数，我们有

$$J_{k,n}(pP_1) \leqslant J_1 + J_2.$$

我们估计 J_1．因为把 n 个数放在 k 个位置上共有 $k(k-1)\cdots(k-n+1)$ 种放法．所以 J_1 不超过 $k^{2n}J_1'$，这里 J_1' 是方程组 (4) 的满足下述条件的解数：$x_1, \cdots, x_n$ 两两不同，$x_{k+1}, \cdots, x_{k+n}$ 两两不同，而其余的变量是任意的．我们把 J_1' 表为积分的形式．设 $f(x) = \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$，

$$S(x) = \sum_{y=0}^{P_1-1} e^{2\pi i f(x+py)},$$

那么

$$J_1' = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x_1,\cdots,x_n} S(x_1)\cdots S(x_n) \right|^2 \left| \sum_{x=1}^{p} S(x) \right|^{2k-2n} d\alpha_1 \cdots d\alpha_n,$$

其中多重和号是表示对两两不同的 $x_1, \cdots, x_n$ 求和。此外（由引理 3），

$$\left|\sum_{x=1}^{p} S(x)\right|^{2k-2n} \leqslant p^{2k-2n-1} \sum_{x=1}^{p} |S(x)|^{2k-2n},$$

$$J_1' \leqslant p^{2k-2n-1} J_1'',$$

其中

$$J_1'' = \max_{1 \leqslant x \leqslant p} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left|\sum_{x_1,\cdots,x_n} S(x_1)\cdots S(x_n)\right|^2 |S(x)|^{2k-2n} d\alpha_1 \cdots d\alpha_n.$$

而上面这个积分等于下面方程组的解数:

$$\begin{cases} (x_1 + py_1) + \cdots + (x_n + py_n) + (x + py_{n+1}) \\ \quad + \cdots + (x + py_k) \\ = (x_{k+1} + py_{k+1}) + \cdots + (x_{k+n} + py_{k+n}) + (x \\ \quad + py_{k+n+1}) + \cdots + (x + py_{2k}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x_1 + py_1)^n + \cdots + (x_n + py_n)^n + (x \\ \quad + py_{n+1})^n + \cdots + (x + py_k)^n \\ = (x_{k+1} + py_{k+1})^n + \cdots + (x_{k+11} + py_{k+11})^n \\ \quad + (x + py_{k+n+1})^n + \cdots + (x + py_{2k})^n. \end{cases}$$

而由引理 1, f)知,它也等于下面的方程组的解数:

$$\begin{cases} (x_1 - x + py_1) + \cdots + (x_n - x + py_n) - (x_{k+1} \\ \quad - x + py_{k+1}) - \cdots - (x_{k+11} - x + py_{k+n}) \\ = -p(y_{n+1} + \cdots - y_{2k}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x_1 - x + py_1)^n + \cdots + (x_n - x + py_n)^n \\ \quad - (x_{k+1} - x + py_{k+1})^n - \cdots - (x_{k+n} \\ \quad - x + py_{k+n})^n \\ = -p^n(y_{n+1}^n + \cdots - y_{2k}^n). \end{cases}$$

如果在右边括号中的表达式取任意允许取的值，那么这个方程组就变为位于左边部分的那些未知数的同余方程组；而当任意固定右边括号的值时,能够取到这些值的 $y_{n+1}, \cdots, y_k, y_{k-n+1}, \cdots, y_{2k}$ 的组数不超过(引理 1, b))

$$J_{k-n,n}(P_1),$$

此外，固定 $x_{k+1}, y_{k+1}, \cdots, x_{k+n}, y_{k+n}$ 我们就得到：变数 $x_1+py_1, \cdots, x_n+py_n$ 满足引理 2 中的同余方程组，因此，若记 $m=[Pp^{-n}]+1$，就有

$$J_1'' \leqslant n!\, m^n p^{\frac{n^2-n}{2}}(pP_1)^n J_{k-n,n}(P_1),$$

$$J_1 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 4^{2k} p^{\frac{2k}{n}+\frac{3n-5}{2}} J_{k-n,n}(P_1).$$

现在来估计 J_2. 在这种情形，$x_1, \cdots, x_k$ 中至多可能有 $n-1$ 个是不同的. 因此 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的所有可能选取的组数不超过 $n^k p^{n-1}$. 于是，如果 $x_1, \cdots, x_{2k}$ 属于第二类，那么(引理 3 和引理 1)

$$J_2=\int_0^1\cdots\int_0^1 \sum_{\substack{x_1,\cdots,x_k\\ x_{k+1},\cdots,x_{2k}}} S(x_1)\cdots S(x_k)\bar{S}(x_{k+1})\cdots\bar{S}(x_{2k})d\alpha_1\cdots d\alpha_n$$

$$\leqslant n^k p^{k+n-1}\int_0^1\cdots\int_0^1\sum_{x=1}^{p}|S(x)|^{2k}d\alpha_1\cdots d\alpha_n$$

$$\leqslant n^k p^{k+n} J_{k,n}(P_1) \leqslant n^k p^{k+n} P_1^{2n} J_{k-n,n}(P_1)$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \cdot 4^{2k} p^{\frac{2k}{n}+\frac{3n-5}{2}} J_{k-n,n}(P_1).$$

从 J_1, J_2 的估计推出引理的断言.

定理 1. 设 $\tau \geqslant 0$ 是整数，$k \geqslant n^2+n\tau$，$P \geqslant 1$. 那么，

$$J=J_{k,n}(P) \leqslant (4n)^{4k\tau} P^{2k-\frac{n^2+n}{2}+\delta_\tau},$$

其中

$$\delta_\tau=\frac{n^2+n}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^\tau.$$

证. 首先设

$$P \geqslant (2n)^{3n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^\tau}.$$

当 $\tau=0$ 时，定理的断言显然正确. 假定当 $\tau=m\geqslant 0$ 时断言成立，我们证明当 $\tau=m+1$ 时断言也成立. 我们有

$$k \geqslant n^2+n(m+1), \quad P \geqslant (2n)^{3n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{m+1}}$$

应用引理 4，得到

$$J_{k,n}(P) \leqslant 4^{2k} P^{\frac{2k}{n}+\frac{3n-5}{2}} J_{k-n,n}(P_1). \tag{5}$$

为了估计 $J_{k-n,n}(P_1)$，可以应用归纳法假定，因为

$$k-n \geqslant n^2+nm, \quad P_1 \geqslant P^{1-\frac{1}{n}} \geqslant (2n)^{3n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^m}.$$

这样一来，

$$\begin{aligned} J_{k-n,n}(P_1) &\leqslant (4n)^{4(k-n)m} P_1^{2(k-n)-\frac{n^2+n}{2}+\delta_m} \\ &\leqslant (4n)^{4(k-n)m} \cdot 4^{2(k-n)} P^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2k-2n-\frac{n^2+n}{2}+\delta_m\right)}. \end{aligned}$$

由此及式 (5) 推出定理的断言．现在设

$$P < (2n)^{3n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^r}.$$

仍应数学归纳法．我们有

$$P < (2n)^{3n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{m+1}}, \quad k \geqslant n^2+n(m+1).$$

于是

$$J_{k,n}(P) \leqslant P^{2n} J_{k-n,n}(P).$$

如果

$$P \geqslant (2n)^{3n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^m},$$

那么我们利用定理已经证明的部分来估计 $J_{k-n,n}(P)$；如果

$$P < (2n)^{3n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^m},$$

那么我们应用归纳法假设来估计 $J_{k-n,n}(P)$，这样一来就总有

$$J_{k-n,n}(P) \leqslant (4n)^{4km} P^{2(k-n)-\frac{n^2+n}{2}+\delta_m}$$

与

$$J_{k,n}(P) \leqslant (4n)^{4k(m+1)} P^{2k-\frac{n^2+n}{2}+\delta_{m+1}}.$$

定理证毕。

§2. Zeta 和的估计

形如

$$\sum_{n=1}^{N} n^{it}, \quad \sum_{a<n\leqslant 2a} n^{it}$$

的三角和称为 Zeta 和。

为了估计这种和，需要两个引理。

引理 5. 当 $P \geqslant 1$ 时，

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \alpha x}\right| \leqslant \min\left(P, \frac{1}{2(\alpha)}\right),$$

其中 $(\alpha) = \min(\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\})$.

证. 可以假定 $0 < \alpha < 1$. 这时

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \alpha x}\right| = \left|\frac{e^{2\pi i \alpha P} - 1}{e^{2\pi i \alpha} - 1}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin \pi\alpha|} \leqslant \frac{1}{2(\alpha)}.$$

引理 6. 设

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \ (a, q) = 1, \ q \geqslant 1, \ |\theta| \leqslant 1,$$

则对于任意的 β, $U > 0$, $P \geqslant 1$, 有

$$\sum_{x=1}^{P} \min\left(U, \frac{1}{(\alpha x + \beta)}\right) \leqslant 6\left(\frac{P}{q} + 1\right)(U + q\log q).$$

证. 只需证明对于任意的 β_1, 有

$$S = \sum_{x=1}^{q} \min\left(U, \frac{1}{(\alpha x + \beta_1)}\right) \leqslant 6(U + q\log q).$$

我们有

$$\alpha x + \beta_1 = \frac{ax + [q\beta_1]}{q} + \frac{\theta'(x)}{q^2},$$

$$\theta'(x) = \theta x + \{q\beta_1\}q, \ |\theta'(x)| < 2q.$$

因为函数 (x) 是以 1 为周期的周期函数，所以作替换 $y = ax + [q\beta_1]$, 我们得到

$$S = \sum_{|y| \leqslant \frac{q}{2}} \min\left(U, \frac{1}{\left(\frac{y}{q} + \frac{\theta''(y)}{q}\right)}\right),$$

其中 $|\theta''(y)| < 2$. 如果 $2 < |y| \leqslant q/2$, 那么

$$\left(\frac{y}{q}+\frac{\theta''(y)}{q}\right) \geqslant \frac{|y|-2}{q},$$

于是有

$$S \leqslant 5U + \sum_{2<|y|\leqslant q/2} \frac{q}{|y|-2} < 6(U + q\log q).$$

引理证毕.

定理 2. 存在两个绝对常数 $c>0$, $\gamma>0$, 使得当 $2 \leqslant N \leqslant t$ 时，有

$$\left|\sum_{n=1}^{N} n^{it}\right| \leqslant cNe^{-\gamma\frac{\log^3 N}{\log^2 t}}. \tag{6}$$

证. 设 $100 \leqslant N_1 \leqslant N$; 我们估计和

$$S = \sum_{n=N_1}^{2N_1} n^{it}.$$

取 $a=[N_1^{\frac{5}{11}}]$, $1 \leqslant x, y \leqslant a$. 我们有

$$S = \sum_{n=N_1}^{2N_1} e^{it\log(n+xy)} + 2\theta a^2, \ |\theta| \leqslant 1.$$

因此

$$|S| \leqslant a^{-2}\sum_{n=N_1}^{2N_1} |W(n)| + 2a^2,$$

其中 $W(n)=W=\sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{a} e^{it\log\left(1+\frac{xy}{n}\right)}$. 我们来估计 $|W|$.

因为

$$|e^{i\varphi}-1| = 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| \leqslant |\varphi|,$$

所以当 $r \geqslant 1$ 时，

$$e^{it\log\left(1+\frac{xy}{n}\right)} = e^{itF_r(xy)} + t\theta_1\left(\frac{a^2}{n}\right)^{r+1},$$

其中

$$F_r(xy) = \sum_{m=1}^{r} \frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\frac{xy}{n}\right)^m, \quad |\theta_1| \leqslant 1.$$

我们由条件

$$r - 1 < \frac{11 \log t}{\log N_1} \leqslant r$$

确定数 r，则

$$W = W_1 + 4\theta_2 a^2 N_1^{-\frac{1}{13}},$$

其中

$$W_1 = \sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{a} e^{2\pi i(\alpha_1 xy + \cdots + \alpha_r x^r y^r)},$$

$$\alpha_m = \frac{(-1)^{m-1}}{2\pi m} \cdot \frac{t}{n^m}, \quad m = 1, 2, \cdots, r; \ |\theta_2| \leqslant 1.$$

对于整数 $k \geqslant 1$（引理 3 和引理 1），有

$$|W_1|^{2k} \leqslant a^{2k-1} \sum_{x=1}^{a} \left| \sum_{y=1}^{a} e^{2\pi i(\alpha_1 xy + \cdots + \alpha_r x^r y^r)} \right|^{2k}$$

$$\leqslant a^{2k-1} \sum_{\lambda_1, \cdots, \lambda_r} J_{k,r}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \left| \sum_{x=1}^{a} e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 x + \cdots + \alpha_r \lambda_r x^r)} \right|.$$

进而有（引理 1, 3, 4）

$$|W_1|^{4k^2} \leqslant a^{4k^2-2k} \left(\sum_{\lambda_1, \cdots, \lambda_r} J_{k,r}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \right)^{2k-1}$$

$$\times \sum_{\lambda_1, \cdots, \lambda_r} J_{k,r}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \left| \sum_{x=1}^{a} e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 x + \cdots + \alpha_r \lambda_r x^r)} \right|^{2k}$$

$$\leqslant a^{8k^2-4k} J_{k,r}(0, \cdots, 0) \Bigg| \sum_{\substack{\lambda_1, \cdots, \lambda_r \\ \mu_1, \cdots, \mu_r}}$$

$$\times J_{k,r}(\mu_1, \cdots, \mu_r)\, e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 \mu_1 + \cdots + \alpha_r \lambda_r \mu_r)} \Bigg|$$

$$\leqslant a^{8k^2-4k} J_{k,r}(0, \cdots, 0) \sum_{\mu_1, \cdots, \mu_r} J_{k,r}(\mu_1, \cdots, \mu_r)$$

$$\times \min\left(2A_1, \frac{1}{(\alpha_1 \mu_1)}\right) \cdots \min\left(2A_r, \frac{1}{(\alpha_r \mu_r)}\right).$$

$$\leqslant a^{8k^2-4k} J_{k,r}^2(0, \cdots, 0) \prod_{m=1}^{r} \sum_{|\mu_m| \leqslant A_m} \min\left(2A_m, \frac{1}{(\alpha_m \mu_m)}\right),$$

其中

$$A_m = 2ka^m, \ m = 1, 2, \cdots, r.$$

对于位于区间

$$4 \frac{\log t}{\log N_1} \leqslant m \leqslant 8 \frac{\log t}{\log N_1} \tag{7}$$

中的整数 m，对 μ_m 求和的和式可利用引理 6 来估计. 而对于其余的 m，对 μ_m 求和的和式有明显估计 $(2A_m)^2$. 对于满足式(7)的 m，有

$$\begin{aligned}
\sigma_m &= \sum_{\mu_m} \min\left(2A_m, \frac{1}{(\alpha_m \mu_m)}\right) \\
&\leqslant 6\left(\frac{2A_m}{q_m} + 1\right)(2A_m + q_m \ln q_m) \\
&\leqslant 6(2A_m)^2\left(\frac{1}{q_m} + \frac{1}{A_m} + \frac{q_m}{4A_m^2}\right) \ln q_m,
\end{aligned}$$

其中

$$\alpha_m = \frac{(-1)^{m-1} t}{2\pi m n^m} = \frac{a_m}{q_m} + \frac{\theta_m}{q_m^2},$$

$$a_m = (-1)^{m-1}, \quad q_m = \left[\frac{2\pi m n^m}{t}\right], \ |\theta_m| \leqslant 1.$$

由 m 所满足的条件，得到

$$\sigma_m \leqslant 400(32)^r (2A_m)^2 t^{-\frac{2}{11}};$$

$$|W_1|^{4k^2} \leqslant a^{8k^2-4k} J_{k,r}^2(0, \cdots, 0) \cdot (400)^r (32)^{r^2} (4k)^{2r} a^{r^2+r} t^{-\frac{8}{11} \cdot \frac{\log t}{\log N_1}}.$$

因为 $a \leqslant N^{\frac{5}{4}}$，所以选取满足条件

$$e^\tau \geqslant 380^r$$

的最小整数 τ，在条件 $k = r^2 + r\tau$ 下，应用定理 1 估计 $J_{k,r}(0, \cdots, 0)$，我们得到

$$|W_1|^{4k^2} \leqslant a^{8k^2}(400)^r(32)^{r^2}(4k)^{2r}(4r)^{8kr}t^{-\frac{1}{11}\frac{\log r}{\log N_1}};$$

$$|W_1| \leqslant c_1 a^2 e^{-\gamma_1 \frac{\log^3 N_1}{\log^2 t}},$$

其中 $c_1 > 0$，$\gamma_1 > 0$ 是绝对常数.

由此推出所需要的 $|S|$ 的估计，而从这个估计就得到定理的估计式(6). 定理证毕.

推论. 当 $|t| \geqslant 2$ 时,

$$\zeta(1 + it) = O(\log^{\frac{2}{3}}|t|).$$

证. 由第三章的定理 6 和引理 3 推出.

§3. ζ 函数在直线 Re s = 1 附近的估计

在直线 $\mathrm{Re}\, s = 1$ 的附近，我们也能够得到与定理 2 的推论同样的估计.

定理 3. 存在绝对常数 $\gamma_1 > 0$，使得当

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{\gamma_1}{\log^{\frac{2}{3}}|t|}, \quad |t| \geqslant 2$$

时，有估计

$$\zeta(\sigma + it) = O(\log^{\frac{2}{3}}|t|).$$

证. 可以假定 $\sigma \leqslant 2$. 取 $\gamma_1 = \frac{\gamma}{2}$，这里 γ 是定理 2 中的绝对常数，$N = [e^{\ln^{\frac{2}{3}}|t|}]$，$x = |t|$. 根据第三章定理 6,

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant N} \frac{1}{n^s} + \sum_{N < n \leqslant x} \frac{1}{n^s} + O(1).$$

第一个和的模不超过

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{1}{n^\sigma} \leqslant 1 + \int_1^N \frac{du}{u^\sigma} = 1 + \int_1^N \frac{u^{1-\sigma}}{u}\, du$$

$$\leqslant 1 + \int_1^N N^{\gamma_1 \log^{-\frac{2}{3}}|t|} \frac{du}{u}$$

$$= O(\ln N) = O(\ln^{\frac{2}{3}}|t|).$$

为了估计第二个和，我们应用第三章的引理 3 (这里设 $c_n = n^{-it}$,

$C(u) = \sum_{N<n\leqslant u} n^{-it}$, $f(u) = u^{-\sigma}$) 以及定理 2:

$$\left|\sum_{N<n\leqslant x}\frac{1}{n^s}\right| \leqslant \sigma\int_N^x |C(u)|\,u^{-1-\sigma}du + |C(x)|\,x^{-\sigma}$$

$$= O\left(\int_N^x u^{-\sigma} e^{-\frac{\gamma\log^3 u}{\log^2|t|}}du\right) + O(|t|^{1-\sigma-\gamma})$$

$$= O\left(\int_{\log N}^{\log x} e^{v(1-\sigma)-\gamma\frac{v^3}{\log^2|t|}}dv\right) + O(1)$$

$$= O\left(\int_{\log N}^{\log x} e^{-\frac{\gamma}{2}\frac{v^3}{\log^2|t|}}dv\right) + O(1)$$

$$= O(\log^{\frac{2}{3}}|t|).$$

定理证毕。

问　　题

1. (И. М. Виноградов)。设 m, P 是正整数。

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)},$$

$$f(x) = \alpha_{n+1}x^{n+1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2},\ (a, q) = 1,\ 1 \leqslant q \leqslant P^{n+1}.$$

那么在假定:

a) $q = P^\tau$, 如果 $1 \leqslant q \leqslant P$;

b) $\tau = 1$, 如果 $P < q \leqslant P^n$;

c) $q = P^{n+1-\tau}$, 如果 $P^n < q \leqslant P^{n+1}$

之下将有

$$|S| \leqslant e^{c(nl\log n+\frac{\rho}{\tau}\log m)}P^{1-c_1\rho},$$

其中

$$l = \log\frac{n}{\tau},\ \rho = \frac{\tau}{n^2 l}$$

(参照定理 2 的证明)。

2. 设 $c_0>0$ 是任意固定的数，γ 是常数，$1<\gamma<\frac{3}{2}$，$m\neq 0$，$P\geqslant 1$，

$$f(x)=e^{c_0(\log x)^\gamma},$$

$$S=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)}.$$

如果 $0<|m|<e^{(\log P)^{3-2\gamma-\varepsilon_0}}$，其中 $0<\varepsilon_0<3-2\gamma$，那么

$$|S|\leqslant c_1 P e^{-c_2(\log P)^{3-2\gamma}}$$

(参照定理 2 的证明).

3. (И. М. Виноградов) 设 $0<\Delta<\frac{1}{4}$，$\Delta\leqslant\beta-\alpha\leqslant 1-\Delta$. 又设 $\psi_0(x)$ 是由下面的等式确定的以 1 为周期的周期函数:

$$\psi_0(x)=1，\text{如果 } \alpha<x<\beta;$$

$$\psi_0(x)=\frac{1}{2}，\text{如果 } x=\alpha \text{ 或 } x=\beta;$$

$$\psi_0(x)=0，\text{如果 } \beta<x<1+\alpha.$$

考虑函数序列

$$\psi_r(x)=\frac{n}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2n}}^{+\frac{\Delta}{2n}}\psi_{r-1}(x+z)dz，\quad r=1,2,\cdots,n,$$

则有

$$\psi_n(x)=\beta-\alpha+\sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' C_m^{(n)} e^{2\pi i m x},$$

其中

$$|C_m^{(n)}|\leqslant\min\left(\frac{1}{|m|},\ \beta-\alpha,\ \frac{1}{|m|}\left(\frac{n}{\Delta|m|}\right)^n\right),$$

和号中的一撇表示 $C_0^{(n)}=0$ (И. М. Виноградов"套" (стакачик)).

4. 设 $0<\sigma\leqslant 1$，$D(P;\sigma)$ 是数列 $x=1,2,\cdots,P$ 中满足条件 $\{f(x)\}<\sigma$ 的数的个数，又设

$$D(P;\sigma)=\sigma P+\lambda(P;\sigma).$$

那么

a) $\lambda(P;\ \sigma)=O(P^{1-c_1\rho})$，如果 $f(x)$ 满足问题 1 的条件；

b) $\lambda(P;\ \sigma)=O(Pe^{-c_2(\log P)^{3-2\gamma}})$，如果 $f(x)$ 满足问题 2 的条件.

5. 设 $\frac{1}{2}\leqslant \mathrm{Re}\, s\leqslant 1$，$|t|\geqslant 2$，则

$$\zeta(s)=O(|t|^{a(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}\log|t|),$$

其中 $a>1$ 是绝对常数.

6. 当 $x\geqslant 1$ 时，有

$$D_k(x)=\sum_{n\leqslant x}\tau_k(n)=xP_k(\log x)+O(x^{1-c_1k^{-\frac{2}{3}}+\varepsilon}),$$

其中 P_k 是 $k-1$ 次多项式.

7. 设

$$f(x)=\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0,$$

$$\alpha_2=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\ (a,q)=1,\ 1\leqslant q\leqslant P^2,$$

则

$$\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i f(x)}=O\left(P^{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{P}+\frac{1}{q}+\frac{q}{P^2}}\right).$$

8. 由第三章的问题 3 与本章的问题 7，证明

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O(|t|^{\frac{1}{6}+\varepsilon})$$

（参照第七章的问题）.

第六章　ζ 函数零点的新边界

在第三章§ 4 中，曾经得到了关于 ζ 函数零点边界（界限）的最简单的结果．三角和方法与函数论上的考虑可以进一步改进这个结果．

§ 1．函数论的定理

定理1． 设 $F(s)$ 是圆 $|s-s_0|\leqslant r$ 上的解析函数，$F(s_0)\neq 0$，并且在这个圆上

$$\left|\frac{F(s)}{F(s_0)}\right|\leqslant M.$$

如果在区域 $|s-s_0|\leqslant\frac{r}{2}$，$\mathrm{Re}(s-s_0)\geqslant 0$ 上 $F(s)\neq 0$，那么

a）$\mathrm{Re}\,\frac{F'(s_0)}{F(s_0)}\geqslant-\frac{4}{r}\log M$；

b）$\mathrm{Re}\,\frac{F'(s_0)}{F(s_0)}\geqslant-\frac{4}{r}\log M+\mathrm{Re}\,\frac{1}{s_0-\rho}$，

其中 ρ 是 $F(s)$ 在区域 $|s-s_0|\leqslant\frac{r}{2}$，$\mathrm{Re}(s-s_0)<0$ 中的任意一个零点．

证． 考虑函数

$$g(s)=F(s)\prod_{\rho}(s-\rho)^{-1},\ s\neq\rho;\ g(\rho)=\lim_{s\to\rho}g(s),$$

其中 ρ 是 $F(s)$ 在圆 $|s-s_0|\leqslant\frac{r}{2}$ 上按重数计算的所有零点；这样，$g(s)$ 在圆 $|s-s_0|\leqslant r$ 上是解析的．在圆周 $|s-s_0|=r$ 上，有

$$\left|\frac{g(s)}{g(s_0)}\right|=\left|\frac{F(s)}{F(s_0)}\prod_{\rho}\frac{s_0-\rho}{s-\rho}\right|\leqslant M.$$

因此，这个不等式在圆 $|s-s_0|\leqslant r$ 上也成立．考虑较小的圆 $|s-s_0|\leqslant r/2$，在这个圆上 $g(s)\neq 0$．因此，函数 $f(s)=\ln\times\frac{g(s)}{g(s_0)}$（取对数主值）在这个圆上是解析的，并且

$$\operatorname{Re} f(s)=\log\left|\frac{g(s)}{g(s_0)}\right|\leqslant\log M$$

（因为当 $s=s_0$ 时 $\frac{g(s)}{g(s_0)}=1$，所以根据最大模原理 $M\geqslant 1$）及

$$\operatorname{Re} f(s_0)=0.$$

因此，应用第一章的引理 4，a)，得到

$$|f'(s_0)|=\left|\frac{g'(s_0)}{g(s_0)}\right|\leqslant\frac{4}{r}\log M;$$

$$\left|\frac{g'(s_0)}{g(s_0)}\right|=\left|\frac{F'(s_0)}{F(s_0)}-\sum_\rho\frac{1}{s_0-\rho}\right|\leqslant\frac{4}{r}\log M,$$

即是

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{F'(s_0)}{F(s_0)}-\sum_\rho\frac{1}{s_0-\rho}\right\}\geqslant-\frac{4}{r}\log M.$$

因为 $\operatorname{Re}(s_0-\rho)>0$，所以从

$$\operatorname{Re}\frac{F'(s_0)}{F(s_0)}\geqslant-\frac{4}{r}\log M+\operatorname{Re}\sum_\rho\frac{1}{s_0-\rho}$$

推出定理的断言．

§2. ζ 函数零点的新边界

下面的定理改进了第三章 §4 的结果

定理2. 存在绝对常数 $c>0$，使得在区域

$$\sigma\geqslant 1-\frac{c}{\ln^{\frac{2}{3}}(|t|+10)\ln\ln(|t|+10)}$$

内 $\zeta(s)\neq 0$.

证． 设 $t\geqslant t_0>0$，t 是 $\zeta(s)$ 的零点 $\rho=\sigma+it$ 的纵坐标；假定

$$\sigma = 1 - \frac{d}{\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)\ln\ln(2t+2)}, \quad d \leqslant 1.$$

应当证明 $d \geqslant c_1 > 0$. 可以认为 t_0 充分大，使得

$$\frac{1}{\ln\ln(2t+2)} < \frac{\gamma_1}{10},$$

其中 γ_1 是第五章定理 3 中的常数. 那么

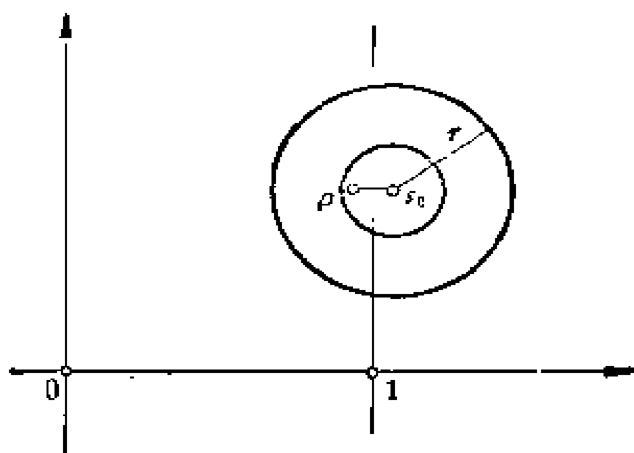
$$\frac{d}{\ln\ln(2t+2)} < \frac{\gamma_1}{10}.$$

我们考虑点

$$s_0 = 1 + \frac{4d}{\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)\ln\ln(2t+2)} + it = \sigma_0 + it$$

(见图). 作以 s_0 为中心，以 r 为半径的圆，这里

$$r = \frac{\gamma_1}{\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)}.$$



由于

$$\frac{\gamma_1}{2\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)} > \frac{5d}{\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)\ln\ln(2t+2)},$$

点 ρ 位于以 s_0 为中心、以 $\frac{r}{2}$ 为半径的圆内，设定理 1 中的 $F(s) =$

$=\zeta(s)$，我们在圆 $|s-s_0|\leqslant r$ 上估计

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}\right|.$$

根据第五章定理 3，在圆 $|s-s_0|\leqslant r$ 上，

$$\zeta(s)=O(\log^{\frac{2}{3}}t).$$

此外，

$$\frac{1}{|\zeta(s_0)|}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma_0}}\leqslant 1+\int_1^{\infty}\frac{du}{u^{\sigma_0}}$$
$$=\frac{\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)\ln\ln(2t+2)}{4d}+1.$$

因此

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}\right|\leqslant M=c_2\frac{\log^2 t}{d}.$$

这个估计在圆 $|s-s_1|\leqslant r$，$s_1=\sigma_0+i2t$ 上也成立。因为在区域 $|s-s_0|\leqslant\frac{r}{2}$，$\mathrm{Re}(s-s_0)\geqslant 0$ 和区域 $|s-s_1|\leqslant\frac{r}{2}$，$\mathrm{Re}(s-s_1)\geqslant 0$ 上 $\zeta(s)\neq 0$，所以应用定理 1，有

$$\mathrm{Re}\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\geqslant-\frac{4}{r}\log M+\mathrm{Re}\frac{1}{s_0-\rho}$$
$$=-\frac{4}{\gamma_1}\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)\ln M$$
$$+\frac{\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)\ln\ln(2t+2)}{5d},$$

$$\mathrm{Re}\frac{\zeta'(s_1)}{\zeta(s_1)}\geqslant-\frac{4}{r}\log M=-\frac{4}{\gamma_1}\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)\ln M.$$

此外，当 $\sigma_0>1$ 时，

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)}<\frac{1}{\sigma_0-1}+c_3.$$

其次（和第三章 § 4 中一样），

$$3\left\{-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)}\right\}+4\left\{-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(\sigma_0+it)}{\zeta(\sigma_0+it)}\right\}$$

$$+\left\{-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma_0+2it)}{\zeta(\sigma_0+2it)}\right\}\geqslant 0.$$

将所得到的估计代入这个不等式并化简，得到

$$-\frac{\ln\ln(2t+2)}{20d}-\frac{20}{\gamma_1}\ln d+\frac{40}{\gamma_1}\ln\ln(2t+2)+c_4\geqslant 0,$$

或者

$$-\frac{1}{d}\left(\frac{\ln\ln(2t+2)}{20}+\frac{20d}{\gamma_1}\ln d\right)$$
$$+\left(\frac{40}{\gamma_1}\ln\ln(2t+2)+c_4\right)\geqslant 0.$$

因为当 $d\to 0$ 时，$d\ln d\to 0$，$\frac{1}{d}\to\infty$，所以从这个不等式可以看出必有 $d\geqslant c_1>0$。从已经证明的结果和第三章定理 5 便推出定理的断言。

§3. 素数分布的渐近公式中的新余项

下面的定理是定理 2 和第四章 §3 的结果的简单推论。

定理 3. 下面的渐近公式成立 ($x\geqslant x_0>0$)：

$$\psi(x)=x+O\left(xe^{-c_1\ln^{\frac{3}{5}}x(\ln\ln x)^{-\frac{1}{5}}}\right),$$
$$\pi(x)=\int_2^x\frac{du}{\ln u}+O\left(xe^{-c_2\ln^{\frac{3}{5}}x(\ln\ln x)^{-\frac{1}{5}}}\right).$$

证. 取 T，使得 $\ln T=\ln^{\frac{3}{5}}(\ln\ln x)^{-\frac{1}{5}}$，应用第四章定理 3 和上节定理 2，将有

$$|\psi(x)-x|\leqslant\left|\sum_{|\operatorname{Im}\rho|\leqslant T}\frac{x^\rho}{\rho}\right|+O\left(\frac{x\ln^2x}{T}\right)$$
$$\leqslant x^\sigma\sum_{|\operatorname{Im}\rho|\leqslant T}\frac{1}{|\rho|}+O\left(\frac{x\ln^2x}{T}\right),$$

其中

$$\sigma=1-\frac{c}{\ln^{\frac{2}{3}}T\ln\ln T}.$$

由此得到定理的第一个断言，第二个断言由第一个断言推出(见第

四章§2)。

问　　题

A. 证明:

a) $M(x)=\sum\limits_{n\leqslant x}\mu(n)=O(xe^{-c\ln^{\frac{3}{5}-\varepsilon}x})$;

b) $\prod(x)=\prod\limits_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-\gamma}}{\ln x}(1+O(e^{-c\ln^{\frac{3}{5}-\varepsilon}x}))$,

其中 γ 是 Euler 常数。

B. 证明:

a) $\sum\limits_{n\leqslant x}\tau(n)=x(\ln x+c)+O(\sqrt{x})$;

b) $\sum\limits_{n\leqslant x}\tau^2(n)=O(x\ln^3 x)$;

c) 当 $m\leqslant x$ 时,有

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)\tau(n+m)=O(x\ln^3 x).$$

ζ函数的 Dirichlet 级数的部分和在直线 Re s = 1 右边的零点 (C. M. Воронин)

1. 设实数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ 在有理数域上线性无关, $0<\varepsilon<\frac{1}{4}$, 则对于任意实数 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N$, 存在 t, 使得 $(\alpha_1 t-\beta_1)<\varepsilon,\cdots,(\alpha_N t-\beta_N)<\varepsilon$ (对于每个 j, $j=1,2,\cdots,N$, 作点 β_j 的 ε-"套", (стаканчик), 即当 $|x_j-\beta_j|\geqslant\varepsilon$, $\varphi_j(x_j)=0$, $\varphi_j(\beta_j)=1$ (见第五章问题3)。将函数 $f(x_1,\cdots,x_N)=\varphi_1(x_1)\cdots\varphi_N(x_N)$ 展为 Fourier 级数,并证明

$$\int_0^T f(\alpha_1 t,\cdots,\alpha_N t)dt$$

$$=T\int_0^1\cdots\int_0^1\varphi(x_1,\cdots,x_N)dx_1\cdots dx_N+o(T).)$$

2. 设

$$\Phi(X;\, s,\, \vec{\theta}) = \sum_{n \leqslant X} n^{-s} e^{2\pi i \sum_{p} \alpha_p(n)\theta_p},$$

其中 $n = \prod_p p^{\alpha_p(n)}$ 是 n 的标准素因子分解式，θ_p 是下标为素数的独立实变数．如果

$$\Phi(X;\, s_0,\, \vec{\theta}) = 0,$$

那么对于每个 $\delta > 0$，存在 s_1，使得 $\operatorname{Re} s_1 > \operatorname{Re} s_0 - \delta$，且

$$\Phi(X;\, s_1) = \sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n^{s_1}} = 0$$

（利用 Rouché 定理和问题 1 ）．

3．当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时，等式

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

成立，其中

$$\lambda(n) = (-1)^{\sum_{p \mid n} \alpha_p(n)}, \qquad n = \prod_p p^{\alpha_p(n)}$$

4．证明：

a) $\left.\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\right|_{s=1} = 0$； b) $\left.\frac{d}{ds}\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\right|_{s=1} > 0$．

5．设

$$F(\theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \cdots, \theta_{p_k}) = \sum_{n=1}^{k} \ln\left(1 - \frac{e^{2\pi i \theta_{p_n}}}{p^n}\right)^{-1},$$

其中 $\theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \cdots, \theta_{p_k}$ 是下标为素数的独立实变数，按其大小顺序排列．证明：对于每一个自然数 m，存在 $k_0 = k_0(m)$，使得对于任意的 $k \geqslant k_0$，方程

$$\operatorname{Im} F(\theta_{p_1}, \cdots, \theta_{p_k}) = \pi m$$

有实数解 $(\theta_{p_1}, \cdots, \theta_{p_k})$（利用级数 $\sum \frac{1}{p}$ 的发散性）．

6．证明：存在完全可乘函数 $\lambda'(n)$，即对于任意自然数 m，n

有 $\lambda'(mn)=\lambda'(m)\lambda'(n)$. $\lambda'(n)$ 满足条件:

a) $|\lambda'(n)|=1$;

b) 对于所有素数,除去有穷个外,等式 $\lambda'(p)=\lambda(p)=-1$ 成立;

c) 当 $\operatorname{Re} s>1$ 时,由等式

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda'(n)}{n^s}$$

确定的函数 $F(s)$ 可以开拓为整个 s 平面上的亚纯函数。

d) $F'(s)|_{s=1}<0$;

e) 成立关系式:

α) $\displaystyle\sum_{n\leqslant X}\frac{\lambda'(n)}{n}=O(e^{-c\sqrt{\ln X}})$;

β) 当 $\sigma\geqslant 1$ 时,

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sum_{n\leqslant X}\frac{\lambda'(n)}{n^\sigma}\right)=F'(\sigma)+O(e^{-c\sqrt{\ln X}}).$$

7. 对于任意的 $\sigma\in\left[1,\ 1+\frac{1}{\ln X}\right]$, $X\geqslant X_0>0$, 实变数 θ_p, $\frac{1}{2}X<p\leqslant X$ 的函数

$$F_1=F_1(\bar{\theta}_p)=\sum_{\frac{1}{2}X<p\leqslant X}\left(\frac{1}{p^\sigma}+\frac{e^{2\pi i\theta_p}}{p^\sigma}\right)$$

的值的集合是以点 $(R,0)$ 为中心,以 $R>\frac{c}{\ln X}$ 为半径的圆 $K=K(R)$.

8. 存在 $c_1>0$, 使得当 $X\geqslant X_0>0$, $\sigma=1+\frac{1}{\ln X}$ 时有关系式

$$\sum_{n\leqslant X}\frac{\lambda'(n)}{n^\sigma}\in K=K(R).$$

9. 当 $\sigma=1+\frac{c_1}{\ln X}$, $X\geqslant X_0>0$ 时,具有实值 θ_{p_1}, θ_{p_2}, $\cdots$的

方程

$$\Phi(X;\sigma,\vec{\theta})=\sum_{n\leqslant X}n^{-\sigma}e^{2\pi i\sum_{p}\alpha_p(n)\theta_p}=0$$

有解 ($\Phi(X;\sigma,\vec{\theta})$ 见问题 2)。

10. 当 $X\geqslant X_0>0$ 时，方程

$$\Phi(X;s)=\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n^s}=0$$

有满足条件 $\operatorname{Re}s_1>1+\frac{c_1}{2\ln X}$ 的解 s_1（利用问题 9 和问题 2 ）。

第七章　ζ函数的零点密度与小区间内的素数分布问题

从 $\pi(x)$ 的渐近公式（第六章定理 3）可以推出，对于 $x \geqslant x_0 > 0$，

$$y = xe^{-c'\ln^{\frac{3}{5}}x(\ln\ln x)^{-\frac{1}{5}}},$$

在区间 $(x, x+y)$ 内必有素数．应用 ζ 函数在临界带形内零点分布的密度定理，可以得到更强的结果（见定理 2 的推论）．

§1. 最简单的密度定理

定义． 当 $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$，$T \geqslant 2$ 时，函数 $N(T)$ 和 $N(\sigma, T)$ 由下面的等式给定：

$$N(T) = \sum_{\substack{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T \\ 0 \leqslant \sigma \leqslant 1}} 1, \qquad N(\sigma, T) = \sum_{\substack{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T \\ \operatorname{Re}\rho \geqslant \sigma}} 1;$$

换句话说，$N(T)$ 是 ζ 函数在矩形 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$，$|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T$ 上的非显然零点的个数；$N(\sigma, T)$ 是 ζ 函数在矩形 $|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T$，$\operatorname{Re}\rho \geqslant \sigma$ 上的零点个数．

问题在于要得到 $N(\sigma, T)$ 的尽可能精确的估计． 我们先证明引理．

引理． 设 $S(t)$ 是区间 $[t_0, t_k]$ 上的复的连续可微函数． 又设 $t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k$，$\delta = \min\limits_{0 \leqslant r < k}(t_{r+1} - t_r)$．那么，我们有

$$\sum_{r=1}^{k} \left| S(t_r) \right|^2 \leqslant \frac{1}{\delta}\int_{t_0}^{t_k} |S(t)|^2 dt + 2\left(\int_{t_0}^{t_k} |S(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_{t_0}^{t_k} |S'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证. 我们定义函数 $\omega_r(t)$ (区间 (t_r, t_{r+1}) 的特征函数):

$$\omega_r(t)=\begin{cases}1, & t_r\leqslant t\leqslant t_{r+1};\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

令

$$\varphi_r(t)=\frac{1}{t_{r+1}-t_r}\int_{t_0}^{t}\omega_r(u)du.$$

那么,

$$\int_{t_r}^{t_{r+1}}\varphi_r(t)(|S(t)|^2)'dt$$
$$=\varphi_r(t)|S(t)|^2\Big|_{t_r}^{t_{r+1}}-\frac{1}{t_{r+1}-t_r}\int_{t_r}^{t_{r+1}}|S(t)|^2\omega_r(t)dt$$
$$=|S(t_{r+1})|^2-\frac{1}{t_{r+1}-t_r}\int_{t_r}^{t_{r+1}}|S(t)|^2dt,$$
$$|S(t_{r+1})|^2\leqslant\frac{1}{\delta}\int_{t_r}^{t_{r+1}}|S(t)|^2dt+2\int_{t_r}^{t_{r+1}}|S(t)||S'(t)|dt.$$

不等式的两边对 r 求和，并对于乘积的积分应用 Cauchy 不等式(非负函数乘积的积分的平方不超过函数平方的积分的乘积)就得到引理的断言.

定理 1. 当 $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1$ 时,有估计

$$N(\sigma, T)\leqslant CT^{4\sigma(1-\sigma)}(\log T)^{10}.$$

证. 设 $T\geqslant 2$; 在第三章定理 6 中取 $x=T$. 那么当 $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1$, $|t|\leqslant T$ 时,

$$\zeta(s)=\sum_{n\leqslant T}\frac{1}{n^s}+\frac{T^{1-s}}{s-1}+O(T^{-\sigma}).$$

在这个等式的两边乘以

$$M_X(s)=\sum_{n\leqslant X}\frac{\mu(n)}{n^s},\ X=T^{2\sigma-1},$$

得到

$$\zeta(s)M_X(s)=\Phi(s)+R(s), \tag{1}$$

其中

$$\Phi(s)=M_X(s)\sum_{n\leqslant T}\frac{1}{n^s},$$

$$R(s)=O\left(\frac{T^{1-\sigma}}{|t|+1}|M_X(s)|\right).$$

进而

$$\Phi(s)=\sum_{m\leqslant X}\frac{\mu(m)}{m^s}\sum_{n\leqslant T}\frac{1}{n^s}=\sum_{n\leqslant XT}\frac{a_n}{n^s},$$

其中

$$a_n=\sum_{\substack{m\mid n\\ m\leqslant X\leqslant T\\ \frac{n}{m}\leqslant T}}\mu(m)=\begin{cases}1, & n=1;\\ 0, & 1<n\leqslant X.\end{cases}\tag{2}$$

除此以外，总有 $|a_n|\leqslant\tau(n)$。 现在设 $s=\rho$，$\zeta(\rho)=0$; 那么从式(1)和(2)得到:

$$1\leqslant\left|\sum_{X<n\leqslant XT}\frac{a_n}{n^\rho}\right|+O\left(\frac{T^{1-\sigma}}{|t|+1}|M_X(\rho)|\right);$$

$$1\ll\left|\sum_{X<n\leqslant XT}\frac{a_n}{n^\rho}\right|^2+\frac{T^{2-2\sigma}}{|t|^2+1}|M_X(\rho)|^2.$$

对后一个不等式的两边按 ζ 函数在矩形 $\sigma\leqslant\operatorname{Re}\rho\leqslant1$，$|\operatorname{Im}\rho|\leqslant T$ 的零点求和，得到

$$N(\sigma,T)\ll\sum_\rho\left\{\left|\sum_{X<n\leqslant XT}\frac{a_n}{n^\rho}\right|^2+\frac{T^{2-2\sigma}}{|t|^2+1}|M_X(\rho)|^2\right\}.$$

把对 ρ 的求和作适当的变化，使之能应用引理. 取 $A=[\ln T]$，并且将区间 $[-T,+T]$ 分为长度为 1 、由以下分点确定的小区间:

$$Am+n,\ n=1,2,\cdots,A;\ |m|<TA^{-1}+1.$$

那么

$$\sum_\rho=\sum_{|m|<TA^{-1}+1}\sum_{n=1}^{A}\sum_{Am+n-1<\operatorname{Im}\rho\leqslant Am+n}$$

$$\leqslant A \max_{1\leqslant n\leqslant A} \sum_{|m|<A^{-1}T+1} \sum_{Am+n-1<\mathrm{Im}\rho\leqslant Am+n}.$$

因为在每个矩形 $Am+n-1<\mathrm{Im}\rho\leqslant Am+n$ 中有不超过 $C_2\ln T$ 个零点，所以从每个这样的矩形中取定一个零点，并先对 m 求和，就可把上面的二重和分为不大于 $C_3\ln T$ 个和；用 $\sum\limits_{\rho}'$ 表示它们当中最大的一个，就得到

$$\sum_{\rho} \ll \ln^2 T \sum_{\rho}{}'.$$

再将 $\sum\limits_{\rho}'$ 中满足 $T_1\leqslant|\mathrm{Im}\,\rho|\leqslant 2T_1$, $2T_1\leqslant T$，的项合并为一个和，它就分为不大于 $C_4\ln T$ 个和，这样我们就得到

$$N(\sigma, T) \ll \ln^3 T \sum_{\rho}{}''\left\{\left|\sum_{X<n\leqslant TX}\frac{a_n}{n^\rho}\right|^2+\frac{T^{2-2\sigma}}{T_1^2+1}|M_X(\rho)|^2\right\}, \quad (3)$$

而且和号 $\sum\limits_{\rho}''$ 中按 ζ 函数的零点 ρ 求和的项满足条件： $T_1\leqslant|I_m\rho|\leqslant 2T_1\leqslant T$, $\sigma\leqslant\mathrm{Re}\,\rho\leqslant 1$, $|\mathrm{Im}\,\rho'-\mathrm{Im}\,\rho''|\geqslant\ln T-1$.
现在来估计和

$$\sum_{\rho}{}''\left|\sum_{Y<n\leqslant 2Y}\frac{b_n}{n^\rho}\right|^2,$$

其中 b_n 是满足条件 $|b_n|\leqslant\tau(n)$ 的任意数，Y 是任意整数，$Y\geqslant 1$.

我们有 $(\rho=\sigma_r+it_r)$

$$\sum_{Y<n\leqslant 2Y}\frac{b_n}{n^{\sigma_r}}n^{-it_r}=\sum_{Y<n<2Y}\left(\frac{1}{n^{\sigma_r}}-\frac{1}{(n+1)^{\sigma_r}}\right)\sum_{Y<m\leqslant n}b_m m^{-it_r}$$

$$+\frac{1}{(2Y)^{\sigma_r}}\sum_{Y<m\leqslant 2Y}b_m m^{-it_r}.$$

因为 $\sigma\leqslant\sigma_r\leqslant 1$，所以

$$\sum_{\rho}{}''\left|\sum_{Y<n\leqslant 2Y}\frac{b_n}{n^\rho}\right|^2$$

$$\ll Y^{-2\sigma-1}\sum_{Y<n<2Y}\sum_r\left|\sum_{Y<m\leqslant n}b_m m^{it_r}\right|^2+Y^{-2\sigma}\sum_r\left|\sum_{Y<m\leqslant 2Y}b_{n_1}m^{it_r}\right|^2.$$

对于和

$$S_n=\sum_r\Big|\sum_{Y<m\leqslant n}b_m m^{it_r}\Big|^2\qquad(Y<n\leqslant 2Y)$$

应用引理得到

$$S_n\ll\frac{1}{\ln T}\int_{T_1}^{2T_1}\Big|\sum_{Y<m\leqslant n}b_m m^{it}\Big|^2dt+\Big(\int_{T_1}^{2T_1}\Big|\sum_{Y<m\leqslant n}b_m m^{it}\Big|^2dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\Big(\int_{T_1}^{2T_1}\Big|\sum_{Y<m\leqslant n}b_m m^{it}\log m\Big|^2dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

剩下的是估计积分 J，

$$J=\int_{T_1}^{2T_1}\Big|\sum_{Y<m\leqslant n}c_m m^{it}\Big|^2dt,$$

其中 $|c_m|\leqslant\tau(m)\log m$。

将按 m 求和的和式的模平方乘开后，就得到

$$J\ll T_1\sum_{Y<m\leqslant 2Y}|c_m|^2+\sum_{Y<m<k\leqslant 2Y}|c_m||c_k|\frac{1}{\log\frac{k}{m}};$$

$$\sum_{Y<m\leqslant 2Y}|c_m|^2\ll\log^2Y\sum_{Y<m\leqslant 2Y}\tau^2(m)\ll Y\log^5Y;$$

$$\sum_{Y<m<k\leqslant 2Y}|c_m||c_k|\frac{1}{\log\frac{k}{m}}\leqslant\sum_{Y<m\leqslant 2Y}\sum_{r=1}^{Y}|c_m||c_{m+r}|\frac{1}{\log\left(1+\frac{r}{m}\right)}$$
$$\ll\sum_{Y<m\leqslant 2Y}\sum_{r=1}^{Y}|c_m||c_{m+r}|\frac{m}{r}$$
$$\ll Y\sum_{r=1}^{Y}\frac{1}{r}\sqrt{\sum_{Y<m\leqslant 2Y}|c_m|^2\sum_{Y<m\leqslant 2Y}|c_{m+r}|^2}$$
$$\ll Y^2\log^6Y.$$

因此

$$J\ll(T_1Y+Y^2)\log^6Y;$$
$$S_n\ll(T_1Y+Y^2)\log^6Y;$$
$$\sum_\rho{}''\Big|\sum_{Y<n\leqslant 2Y}\frac{b_n}{n^\rho}\Big|^2\ll(T_1Y^{1-2\sigma}+Y^{2-2\sigma})\log^6Y.\qquad(4)$$

现在将式 (3) 大括号中的第一个和分为 $\ll \ln T$ 个和，并应用所得到的估计 (4)（注意这时有 $X < Y \leqslant XT$），得到

$$\sum_{\rho}{}'' \Big| \sum_{X < n \leqslant XT} \frac{a_n}{n^{\rho}} \Big|^2 \ll (T_1 X^{1-2\sigma} + (XT)^{2-2\sigma}) \ln^7 T;$$

类似地，将式 (3) 大括号中的第二个和分为 $\ll \ln T$ 个形如式 (4) 的和（注意在这时 $1 \leqslant Y \leqslant X$），得到

$$\frac{T^{2-2\sigma}}{T_1^2 + 1} \sum_{\rho}{}'' |M_X(\rho)|^2 \ll \frac{T^{2-2\sigma}}{T_1^2 + 1}(T_1 + X^{2-2\sigma}) \ln^7 T$$

$$\ll (T^{2-2\sigma} + (TX)^{2-2\sigma}) \ln^7 T \ll T^{4\sigma(1-\sigma)} \ln^7 T.$$

从所得到的估计，X 的取法以及式 (3) 就推出定理的断言。

§2. 小区间内的素数

定理 2. 设 $h \geqslant x^{\frac{3}{4}} e^{\ln^{\frac{2}{3}} x (\ln \ln x)^3}$，$x \geqslant x_0 > 0$；则渐近公式

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h + O(h e^{-\gamma (\ln \ln x)^2})$$

成立. 其中 $\gamma > 0$ 是绝对常数.

证. 当 $2 \leqslant T \leqslant x$ 时（第四章定理 3），

$$\psi(x) = x - \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T} \frac{x^{\rho}}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right).$$

因此（可以认为 $h \leqslant x$），

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h - \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T} \frac{(x+h)^{\rho} - x^{\rho}}{\rho}$$

$$+ O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right). \tag{5}$$

估计关于 ρ 的和，我们有

$$\left| \frac{(x+h)^{\rho} - x^{\rho}}{\rho} \right| = \left| \int_x^{x+h} u^{\rho-1} du \right| \leqslant \int_x^{x+h} u^{\sigma-1} du \leqslant h x^{\sigma-1},$$

其中 $\sigma = \operatorname{Re}\rho$，其次

$$S = \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T} x^{\sigma} = \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T} \left(\log x \int_0^{\sigma} x^u du + 1 \right)$$

$$= N(T) + \log x \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T} \int_0^1 x^u F(u, \sigma) du,$$

其中

$$F(u,\sigma)=\begin{cases}1, & 0\leqslant u\leqslant\sigma;\\ 0, & \sigma<u\leqslant 1.\end{cases}$$

根据 $F(u,\sigma)$ 的定义

$$\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\leqslant T}F(u,\sigma)=N(u,T).$$

由第六章定理 2 可知，当 $u>1-\dfrac{c}{\ln^{\frac{2}{3}}(T+10)\ln\ln(T+10)}$ 时，

$$N(u,T)=0.$$

由第三章定理 4 的推论，

$$N(T)\ll T\ln T;$$

又由定理 1 以及 $\zeta(s)$ 的零点关于直线 $\mathrm{Re}\,s=\dfrac{1}{2}$ 是对称分布的，有

$$N(u,T)\ll T^{4(1-u)}(\ln T)^{10}.$$

所以(假定 $x\geqslant 2T^4$)，

$$\begin{aligned}S&\ll T\ln T+\ln x\int_0^{1-\gamma(T)}x^uT^{4(1-u)}(\ln T)^{10}du\\&\ll T\ln T+(xT^{-4})^{1-\gamma(T)}T^4(\ln T)^{10}\ln x\end{aligned}$$

其中

$$\gamma(T)=\frac{c}{\ln^{\frac{2}{3}}(T+10)\ln\ln(T+10)}.$$

因此由式 (5) 得到

$$\begin{aligned}\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}&=1+O\left(\frac{T\ln T}{x}\right)\\&+O\left(\left(\frac{T^4}{x}\right)^{\gamma(T)}(\ln T)^{10}\ln x\right)+O\left(\frac{x\ln^2x}{Th}\right).\end{aligned}$$

在上面这个关系式中，令

$$T^4=xe^{-\ln^{\frac{2}{3}}x(\ln\ln x)^3},$$

我们便可看出，当

$$h\geqslant x^{\frac{3}{4}}e^{\ln^{\frac{2}{3}}x(\ln\ln x)^3}$$

时，余项是

$$O(e^{-\gamma(\ln\ln x)^2})。$$

定理证毕.

推论. 在定理 2 的记号和条件下，在区间 $(x, x+h]$ 上必有素数.

证. 如果 $x \geqslant x_0$，则有

$$\sum_{x<p\leqslant x+h} \ln p = \psi(x+h) - \psi(x) + O(\sqrt{x}\ln^2 x)$$

$$= h + O(he^{-\gamma(\ln\ln x)^2}) \geqslant 1。$$

问　　题

1. 关系式

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = O(|t|^{\varepsilon})$$

(Lindelöf 假设)成立的必要充分条件是：对于任意的 x，$1 \leqslant x \leqslant |t|$，有

$$\sum_{n\leqslant x} n^{it} = O(\sqrt{x}\,|t|^{\varepsilon}).$$

2. Lindelöf 假设成立的必要充分条件是满足下面条件中的任意一个：

a) $\frac{1}{T}\int_1^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt = O(T^{\varepsilon})$，$k = 1, 2, \cdots$；

b) $\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k} dt = O(T^{\varepsilon})$，$\sigma > \frac{1}{2}$，$k = 1, 2, \cdots$；

c) $\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k} dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}}$，$\sigma > \frac{1}{2}$，$k = 1, 2, \cdots$；

d) $\zeta^k(s) = \sum_{n\leqslant|t|^{\delta}} \frac{\tau_k(n)}{n^s} + O(|t|^{-\lambda})$，$k=1, 2, \cdots$，$\sigma \geqslant \sigma_0 > \frac{1}{2}$，其中 $0 < \delta < 1$ 是任意的，$\lambda = \lambda(k, \delta, \sigma_0) > 0$；

e) $D_k(x) = \sum_{n \leqslant x} \tau_k(n) = xP_k(\ln x) + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$, $k=2, 3, \cdots$.

3. 设 $c > 0$, 使得

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(|t|^c).$$

那么,

$$N(\sigma, T) = O(T^{2(1+2c)(1-\sigma)} \ln^5 T).$$

4. 设 Lindelöf 假设成立, 则

a) $N(\sigma, T) = O(T^{(2+\varepsilon)(1-\sigma)})$;

b) $P_{n+1} - P_n = O(P_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$;

c) (Ю. В. Линник) 对于任意的 N, 一定可以找到两个素数 p, p', 使得 $|N - p - p'| = O(\ln^7 N)$ (参看第四章问题 3).

5. 证明存在常数 γ, $0 < \gamma < 1$, 使得

$$|N - p - p'| = O(N^\gamma),$$

其中 $N > 1$, p 和 p' 是素数. 在问题 3 的条件下计算 γ (参看第四章问题 3).

第八章 Dirichlet L 级数

类似于自然数列中的素数分布问题，我们可以提出和解决算术数列(公差为 $k > 1$，首项为 l, $1 \leqslant l \leqslant k$, $(l, k) = 1$) 中的素数分布问题. 这些问题之所以重要，不仅在于它是经典素数问题的推广，更因为它在解决许多堆垒素数论问题中有特别重要的作用(例如，可参看第十章).

由于存在这样的可乘函数，利用它能够从给定的整数叙列中把属于形如 $kn + l(n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots)$ 的算术数列的子叙列挑选出来，因此，我们可以成功地应用已经在第四章中发展得很完善的方法. L. Dirichlet 所引进的函数 $\chi(n)$ 就是这样的函数，它们被称为特征[1]。今后，当提到特征时，都是指 Dirichlet 特征.

§1. 特征及其性质

首先，我们定义 k 为素数幂时模 k 的特征，并证明它们的基本性质. 然后，利用它们来定义任意模 k 的特征；这时，前者的基本性质仍然成立.

设 $k = p^\alpha$, $p > 2$ 为素数, $\alpha \geqslant 1$. 熟知，对这样的模 k 存在原根，设 g 是原根中的最小的[2]. 对整数 n, $(n, k) = 1$，以 $\operatorname{ind} n$ 表示 n 对模 k 的以 g 为底的指标，即整数 $\gamma = \gamma(n) = \operatorname{ind} n$ 使得

$$g^\gamma \equiv n \pmod{k}.$$

因此，除了可相差一个 $\varphi(k)$ 的倍数外，整数的指标是唯一确定

---

1) 这种特征通常称为 Dirichlet 特征，k 称为特征的模，而这特征称为是模 k 的特征. ——译者注

2) 原根可以是负的，所以这里的 g 应为最小正原根. 事实上，对固定的 p，g 应取为是所有模 p^α 的最小正原根，$\alpha \geqslant 1$. ——译者注

的.

定义 1. 设 $k=p^{\alpha}$, $p>2$ 为素数，$\alpha\geqslant 1$. 我们把定义域是全体整数集合的函数 $\chi(n)$:

$$\chi(n)=\chi(n;k)=\chi(n;k,m)=\begin{cases}0, & (n,k)>1;\\ e^{2\pi i\frac{m\,\mathrm{ind}\,n}{\varphi(k)}}, & (n,k)=1,\end{cases}$$

称为模 k 的特征，其中 m 为任一给定的整数.

从特征的定义可以看出，函数 $\chi(n)=\chi(n;k,m)$ 依赖于参数 m，是 m 的周期函数，周期为 $\varphi(k)$，亦即，大体说来，存在 $\varphi(k)$ 个模 k 的特征，它们可由 m 取值 $0,1,\cdots,\varphi(k)-1$ 而得到.

现在设 $k=2^{\alpha}$, $\alpha\geqslant 3$. 熟知，对任意的奇数 n 存在对模 k 的指标组 $\gamma_0=\gamma_0(n)$ 及 $\gamma_1=\gamma_1(n)$，即存在这样的整数 γ_0 及 γ_1，使得

$$n\equiv(-1)^{\gamma_0}5^{\gamma_1}\pmod{k}.$$

因此，除了可分别相差一个 2 及 $2^{\alpha-2}$ 的倍数外，整数 γ_0 及 γ_1 是唯一确定的.

定义 2. 设 $k=2^{\alpha}$, $\alpha\geqslant 1$. 我们把定义域是全体整数集合并由下述公式之一所确定的函数 $\chi(n)$ 称为模 k 的特征:

$$\chi(n)=\chi(n;2)=\chi(n;2,0,0)=\begin{cases}0, & (n,2)>1;\\ 1, & (n,2)=1;\end{cases}$$

$$\chi(n)=\chi(n;4)=\chi(n;4,m_0,0)=\begin{cases}0, & (n,4)>1;\\ (-1)^{m_0\gamma_0}, & (n,4)=1,\end{cases}$$

其中 $n\equiv(-1)^{\gamma_0}\pmod{4}$, m_0 是整数;

$$\chi(n)=\chi(n;2^{\alpha})=\chi(n;2^{\alpha},m_0,m_1)$$

$$=\begin{cases}0, & (n,2^{\alpha})>1;\\ (-1)^{m_0\gamma_0}e^{2\pi i\frac{m_1\gamma_1}{2^{\alpha-2}}}, & (n,2^{\alpha})=1,\ \alpha\geqslant 3,\end{cases}$$

其中 m_0, m_1 是整数.

从定义 2 可以看出，函数 $\chi(n)=\chi(n;2^{\alpha},m_0,m_1)$ 依赖于参数 m_0 和 m_1，是 m_0 和 m_1 的周期函数，周期分别为 2 和 $2^{\alpha-2}$，亦即，大体说来，存在 $\varphi(k)=\varphi(2^{\alpha})$ 个模 $k=2^{\alpha}$ 的特征，它们可由 m_0

取值 0，1，及 m_1 取值 0，1，…，$2^{\alpha-2}-1$ 而得到.

由于整数的指标或指标组具有周期性（周期等于函数的模），可加性（即乘积的指标或指标组相应地等于每个因子的指标或指标组的和），所以，我们得到特征 $\chi(n)$ 的下列性质：

1. 模 k 的特征 $\chi(n)$ 是周期函数，周期为 k，即 $\chi(n)=\chi(n+k)$；

2. $\chi(n)$ 是可乘函数，即

$$\chi(nm)=\chi(n)\chi(m).$$

显然有 $\chi(1)=1$.

引理 1. 设 $k=p^\alpha$，$\alpha\geqslant 1$，恰好存在 $\varphi(k)$ 个模 k 的特征.

证. 需要证明的是，在所定义的 $\varphi(k)$ 个特征中没有二个是恒等的. 首先，对任意整数 a，等式

$$\frac{1}{m}\sum_{x=0}^{m-1}e^{2\pi i\frac{ax}{m}}=\begin{cases}0, & a\not\equiv 0 \pmod m;\\ 1, & a\equiv 0 \pmod m)\end{cases}\tag{1}$$

成立. 因为当 $e^{2\pi i\frac{a}{m}}\neq 1$ 时，上面的和式等于

$$\frac{e^{2\pi i\frac{am}{m}}-1}{e^{2\pi i\frac{a}{m}}-1}=0,$$

由此就推出了第一个等式；第二个等式显然成立. 其次，若 n 遍历模 k 的简化剩余系，则 $\gamma(n)$ 就遍历模 $\varphi(k)$ 的完全剩余系，或 $\gamma_0(n)$ 和 $\gamma_1(n)$ 就分别遍历模 2 和模 $2^{\alpha-2}$ 的完全剩余系（$k=2$，$k=4$ 的情形，引理显然成立，因而这里仅讨论 $k\neq 2, 4$ 的情形）. 现在设 $\chi(n;k,m_1)$ 和 $\chi(n;k,m_2)$ 是模 $k=p^\alpha$，$p>2$，的两个不同的特征，即 $m_1\not\equiv m_2 \pmod{\varphi(k)}$，如果它们是恒等的，那末就要推出矛盾：

$$\varphi(k)=\sum_{\substack{n=1\\(n,k)=1}}^{k}\frac{\chi(n;k,m_1)}{\chi(n;k,m_2)}=\sum_{x=0}^{\varphi(k)-1}e^{2\pi i\frac{(m_1-m_2)x}{\varphi(k)}}=0.$$

$k=2^\alpha$，$\alpha\geqslant 3$，的情形可同样证明.

定义 3. 在所有与模互素的整数上都等于 1 的特征 $\chi(n)$ 称为

主特征，并记作 $\chi_0(n)$.

由定义 1—3 可推得，对于模 $k=2$，$\chi_0(n)=\chi(n)$，对于模 $k=4$，$\chi_0(n)=\chi(n;4,0)$，对于模 $k=2^\alpha$，$\alpha\geqslant 3$，$\chi_0(n)=\chi(n;k,0,0)$，以及对于模 $k=p^\alpha$，$p>2$，$\chi_0(n)=\chi(n;k,0)$.

特征的基本性质——正交性——包含在下面的引理中.

引理 2. 以下二个等式成立：

$$\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi \bmod k}\chi(n)=\begin{cases}1, & n\equiv 1(\bmod k);\\ 0, & n\not\equiv 1(\bmod k),\end{cases}$$

这里，求和号是表示对模 k 的所有 $\varphi(k)$ 个特征求和；

$$\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{n=1}^{k}\chi(n)=\begin{cases}1, & \chi=\chi_0;\\ 0, & \chi\neq\chi_0.\end{cases}$$

证. 从式 (1) 及定义 1—3 即得引理.

特征 $\chi(n)$ 的最小周期可能小于它的模 k. 在以后，起重要作用的是所谓原特征，即那些最小周期等于它们的模的特征[1].

定义 4. 模 $k=p^\alpha(p>2$ 为素数) 的非主特征 $\chi(n)=\chi(n;k,m)$ 称为原特征，如果 $(m,k)=1$；模 $k=2^\alpha(\alpha\geqslant 3)$ 的非主特征 $\chi(n)=\chi(n;k)=\chi(n;k,m_0,m_1)$ 称为原特征，如果 $(m_1,2)=1$[2]；模 4 的非主特征称为原特征. 模 k 的所有其余的非主特征称为非原特征.

定义 4 的一个直接推论是，对模 $k=p^\alpha$ 的每一个非原特征，一定相应地有一个模 $k_1=p^\beta(\beta<\alpha)$ 的原特征与它恒等.

在原特征的值与 Gauss 和 S 的值之间有下面的重要公式(见引理 3) 成立，这里 Gauss 和 S 定义为

$$S=S(k;a,\chi)=\sum_{n=1}^{k}\chi(n)e^{2\pi i\frac{an}{k}}.$$

引理 3. 若 $\chi(n)$ 是模 k 的原特征，则

---

1) 原特征(一定不是主特征)的这种定义，仅对模为素数幂时适用. ——译者注

2) 对模 $k=2^\alpha(\alpha\geqslant 3)$ 的情形，原特征的定义原文有误. ——译者注

$$\tau(\bar{\chi})\chi(n)=\sum_{a=1}^{k}\bar{\chi}(a)e^{2\pi i\frac{an}{k}},\qquad(2)$$

其中

$$\tau(\chi)=\sum_{a=1}^{k}\chi(a)e^{2\pi i\frac{a}{k}},\qquad|\tau(\chi)|=\sqrt{k}.\qquad(3)$$

证. 当 $k=4$ 时，等式 (2) 和 (3) 可直接验证. 设 $k\neq4$, $(n,k)=1$; m 由同余式

$$mn\equiv1\pmod{k}$$

确定，我们有

$$\chi(n)\tau(\bar{\chi})=\sum_{a=1}^{k}\bar{\chi}(a)\bar{\chi}(m)e^{2\pi i\frac{a}{k}}$$

$$=\sum_{a=1}^{k}\bar{\chi}(am)e^{2\pi i\frac{a}{k}}=\sum_{a=1}^{k}\bar{\chi}(a)e^{2\pi i\frac{an}{k}}$$

(这里，我们利用了 $\bar{\chi}(n)$ 的可乘性，$\bar{\chi}(n)$ 和 $e^{2\pi i\frac{n}{k}}$ 的周期性，以及 am 和 a 一起遍历模 k 的完全剩余系). 余下要讨论 $(n,k)>1$ 的情形. 这时式 (2) 的左边为零. 若 $k=p>2$，则 $(n,k)=p$，再因为 $\chi\neq\chi_0$ 及

$$\sum_{n=1}^{k}\chi(n)=0,$$

所以式 (2) 右边亦为零. 现在设 $k=p^\alpha$, $\alpha>1$, $n=rp$. 这时，

$$\sum_{a=1}^{p^\alpha}\bar{\chi}(a)e^{2\pi i\frac{arp}{p^\alpha}}=\sum_{\substack{v=1\\(v,p)=1}}^{p^{\alpha-1}}\sum_{u=0}^{p-1}\bar{\chi}(up^{\alpha-1}+v)e^{2\pi i\frac{vr}{p^{\alpha-1}}}.$$

我们来证明

$$\sum_{u=0}^{p-1}\bar{\chi}(up^{\alpha-1}+v)=0.$$

由于 $(v,p)=1$，$\bar{\chi}$ 的周期性和可乘性，只要证明等式

$$\sum_{u=0}^{p-1} \bar{\chi}(up^{\alpha-1}+1)=0.$$

设 $p>2$，g 是模 p 的原根．熟知，存在整数 t 使得 $g+pt$ 是模 p^α 的原根，$\alpha \geqslant 1$；而且

$$(g+pt)^{p-1}=1+pb,\quad (b,p)=1.$$

若 γ 是 $1+up^{\alpha-1}$ 对模 p^α 的指标，则 $\gamma=(p-1)\gamma_1$，因而有

$$(g+pt)^{\gamma}=(1+pb)^{\gamma_1}\equiv 1+up^{\alpha-1} \pmod{p^\alpha}.$$

由此得出，

$$\gamma_1=ub_1p^{\alpha-2},\quad bb_1\equiv 1 \pmod{p}.$$

因而，

$$\bar{\chi}(up^{\alpha-1}+1)=e^{-2\pi i\frac{m\,\mathrm{ind}(1+up^{\alpha-1})}{\varphi(p^\alpha)}}=e^{-2\pi i\frac{mub_1}{p}},$$

这里 $(mb_1,p)=1$；

$$\sum_{u=0}^{p-1} e^{-2\pi i\frac{mub_1}{p}}=0.$$

设 $p=2$，$k=2^\alpha$，$\alpha \geqslant 3$．这时，$1+u2^{\alpha-1}$ 的指标组为 0，$u2^{\alpha-3}$，所以 $((m_1,2)=1)$

$$\sum_{u=0}^{1} \bar{\chi}(1+u2^{\alpha-1})=1+(-1)^0 e^{-2\pi i\frac{m_1 2^{\alpha-3}}{2^{\alpha-2}}}=0.$$

这样，就对任意的 n 证明了式 (2)．从式 (2) 及式 (1) 可得

$$\sum_{n=1}^{k} |\tau(\bar{\chi})|^2|\chi(n)|^2=\varphi(k)|\tau(\bar{\chi})|^2\sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{a=1}^{k}\bar{\chi}(a)e^{2\pi i\frac{an}{k}}\right|^2$$

$$=\sum_{a,b=1}^{k}\bar{\chi}(a)\chi(b)\sum_{n=1}^{k}e^{2\pi i\frac{(a-b)n}{k}}=k\varphi(k),$$

这就证明了式 (3)．引理证毕．

现在，我们来定义任意模 $k\geqslant 2$ 的特征．今后，$k=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 总是表示 k 的标准素因子分解式．

定义 5. 由等式

$$\chi(n) = \chi(n; k) = \prod_{t=1}^{r} \chi(n; p_t^{\alpha_t}) \tag{4}$$

所确定的函数 $\chi(n)$ 称为模 k 的特征。

定义 6. 模 k 的特征称为主特征，如果在式 (4) 中，$\chi(n; p_t^{\alpha_t}) = \chi_0(n; p_t^{\alpha_t})$，$t = 1, 2, \cdots, r$。

定义 7. 模 k 的非主特征称为原特征，如果，在式 (4) 中，$\chi(n; p_t^{\alpha_t})$ 都是模 $p_t^{\alpha_t}$ 的原特征，$t = 1, 2, \cdots, r$。不然，$\chi(n)$ 就称为非原特征。

由定义 7 可知，对于每一个模 k 的非原特征 $\chi(n)$，一定存在一个模 k_1 的原特征 $\chi_1(n)$，使得它们在所有与 k 互素的整数上是相等的，而且 k_1 整除 k。这时，我们就说：$\chi(n)$ 是由 $\chi_1(n)$ 导出的特征，而 $\chi_1(n)$ 称为是对应于 $\chi(n)$ 的原特征。

前面对模 $k = p^{\alpha}$ 的特征所证明的所有结论对任意模 k 的特征亦成立，并且是已经证明的那些结果的简单推论。

我们来列出模 k 的特征 $\chi(n)$ 的基本性质。

1. 模 k 的特征 $\chi(n)$ 是以 k 为周期的周期函数，不恒等于零，而且，$\chi(n) = 0$，如果 $(n, k) > 1$，以及 $\chi(n) \neq 0$，如果 $(n, k) = 1$。

2. 对任意的 n 和 m，$\chi(nm) = \chi(n)\chi(m)$ (可乘性)。

3. 恰好存在 $\varphi(k)$ 个模 k 的不同的特征。

4. 正交性：

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \chi(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \pmod{k}; \\ 0, & n \not\equiv 1 \pmod{k}, \end{cases}$$

这里，求和号是表示对模 k 的所有 $\varphi(k)$ 个特征求和；

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{n=1}^{k} \chi(n) = \begin{cases} 1, & \chi = \chi_0; \\ 0, & \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

5. 设 χ 是模 k 的原特征，则

$$\tau(\bar{\chi})\chi(n) = \sum_{m=1}^{k} \bar{\chi}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{k}}, \tag{5}$$

其中

$$\tau(\chi)=\sum_{n=1}^{k}\chi(n)e^{2\pi i\frac{n}{k}},\quad |\tau(\bar{\chi})|=\sqrt{k}.$$

性质 1—5 的证明是简单的。 例如，我们来证明性质 5. 设 $k=k_1k_2$，$(k_1, k_2)=1$，则

$$\chi(m;k)=\chi(m;k_1)\chi(m;k_2).$$

当 m_1 和 m_2 分别遍历模 k_1 和 k_2 的完全剩余系时， $m_1k_2+m_2k_1$ 就遍历模 k_1k_2 的完全剩余系. 所以

$$S(k;n,\bar{\chi})=\sum_{m=1}^{k}\bar{\chi}(m)e^{2\pi i\frac{mn}{k}}$$

$$=\sum_{m_1=1}^{k_1}\sum_{m_2=1}^{k_2}\bar{\chi}(m_1k_2+m_2k_1;k_1)\bar{\chi}(m_1k_2+m_2k_1;k_2)e^{2\pi i\frac{(m_1k_2+m_2k_1)n}{k_1k_2}}$$

$$=\left(\sum_{m_1=1}^{k_1}\bar{\chi}(m_1k_2;k_1)e^{2\pi i\frac{m_1n}{k_1}}\right)\left(\sum_{m_2=1}^{k_2}\bar{\chi}(m_2k_1;k_2)e^{2\pi i\frac{m_2n}{k_2}}\right)$$

$$=\bar{\chi}(k_2;k_1)\bar{\chi}(k_1;k_2)S(k_1;n,\bar{\chi})S(k_2;n,\bar{\chi}).$$

此外还有

$$\tau(\chi)=S(k;1,\chi).$$

由此，从引理 3 即得式 (5).

模 k 的特征可以由性质 1 和 2 来定义.

引理 4. 设 $Y(n)$ 是整数变量 n 的周期函数，周期为 k，不恒等于零，可乘的，即 $Y(n_1n_2)=Y(n_1)Y(n_2)$，而且当 $(n, k)>1$ 时，$Y(n)=0$. 那末，一定存在一个 m，使得

$$Y(n)=\chi(n;k,m).$$

证. 设 $(a, k)=1$，则

$$T=\sum_{n=1}^{k}Y(n)\bar{\chi}(n)=\sum_{n=1}^{k}Y(an)\bar{\chi}(an)=Y(a)\bar{\chi}(a)T.$$

所以，或是对某一个 χ 有 $Y(a)=\chi(a)$，或是对任意的 χ 都有 $T=0$. 但若后一种情形成立，则对任意的 b，$(b, k)=1$，有

$$0=\sum_{\chi}\chi(b)\sum_{n=1}^{k}Y(n)\bar{\chi}(n)=\sum_{n=1}^{k}Y(n)\sum_{\chi}\chi(b)\bar{\chi}(n)$$
$$=Y(b)\varphi(k),$$
这和假设矛盾．引理得证．

推论．模 k_1 的特征和模 k_2 的特征的乘积是模 k_1k_2 的特征．

特征是复值函数．仅取实值的非主特征占有特殊的地位，它们称为实特征．例如，若 $p>2$ 为素数，则模 p 的实特征是

$$\chi(n)=\chi\left(n;\ p,\ \frac{p-1}{2}\right)=\begin{cases}0, & (n,p)>1;\\ (-1)^{\operatorname{ind}n}, & (n,p)=1.\end{cases}$$

这种特征称为 Legendre 符号，并记作 $\left(\frac{n}{p}\right)$． 只要取到一个复值的特征 $\chi(n)$ 就称为复特征，而取 $\chi(n)$ 的共轭复数为其值的特征称为 $\chi(n)$ 的复共轭特征，记作 $\bar{\chi}(n)$． 对模 k 的任意特征 $\chi(n)$ 满足等式

$$\chi^{\varphi(k)}(n)=\chi_0(n).$$

使 $\chi^r(n)=\chi_0(n)$ 成立的最小自然数 r 称为特征 $\chi(n)$ 的指数．这样，主特征的指数为 1，实特征的指数为 2，复特征的指数为 3 或更高．

由于特征的可乘性，有

$$\chi^2(-1)=1,$$

即 $\chi(-1)=\pm 1$．$\chi(-1)=+1$ 的特征称为偶特征，$\chi(-1)=-1$ 的特征称为奇特征．

我们还要指出特征的一个性质．若 $\chi\neq\chi_0$ 是模 k 的特征，则对任意的 M 有

$$\left|\sum_{n=1}^{M}\chi(n)\right|\leqslant\varphi(k).$$

如果 χ 是原特征，那末，上面的不等式还可以改进．

引理 5. 设 χ 是模 k 的原特征，

$$S=\sum_{n<M}\chi(n),$$

则有

$$|S| < \sqrt{k}\ln k.$$

证. 可以认为 $M \leqslant k-1$。根据性质5，

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\chi)}\sum_{m=1}^{k}\overline{\chi}(m)e^{2\pi i\frac{mn}{k}},$$

所以

$$S = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})}\sum_{m=1}^{k}\overline{\chi}(m)\sum_{n<M}e^{2\pi i\frac{mn}{k}} = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})}\sum_{m=1}^{k-1}\overline{\chi}(m)\frac{e^{2\pi i\frac{mM}{k}}-1}{e^{2\pi i\frac{m}{k}}-1}.$$

由此得到

$$|S| \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{m=1}^{k-1}\frac{\left|\sin\pi\frac{mM}{k}\right|}{\left|\sin\pi\frac{m}{k}\right|} < \frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{\left|\sin\pi\frac{m}{k}\right|}.$$

如果 k 是奇数，则

$$|S| \leqslant \frac{2}{\sqrt{k}}\sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}}\frac{1}{\sin\pi\frac{m}{k}} \leqslant \sqrt{k}\sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}}\frac{1}{m},$$

因为，当 $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ 时，$\sin\pi\alpha \geqslant 2\alpha$。

如果 k 是偶数，则

$$|S| < \frac{2}{\sqrt{k}}\sum_{m=1}^{\frac{k}{2}-1}\frac{1}{\sin\pi\frac{m}{k}} + \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{k}\sum_{m=1}^{\frac{k}{2}-1}\frac{1}{m} + \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

其次，我们有

$$\frac{1}{m} \leqslant \ln\frac{2m+1}{2m-1}, \quad m \geqslant 1,$$

$$\sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}}\frac{1}{m} \leqslant \ln k, \quad k\text{ 为奇数};$$

$$\sum_{m=1}^{\frac{k}{2}-1} \frac{1}{m} \leqslant \ln(k-1) \leqslant \ln k - \frac{1}{k},\ k \text{ 为偶数.}$$

综合以上的结果就推出引理的断言.

§2. L 级数的定义及其最简单的性质

Dirichlet L级数是类似于 Riemann ζ 函数的复变函数，它是 Dirichlet 在研究算术数列中的素数分布问题时引进的. 以后，所说的 L 级数总是指 Dirichlet L 级数.

设自然数 $k > 1$, χ 是模 k 的任一特征.

定义 8. 级数

$$L = L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

称为 L 级数.

由 $|\chi(n)| \leqslant 1$，推出 $L(s,\chi)$ 在半平面 $\operatorname{Re} s > 1$ 内解析. 对于 $L(s, \chi)$ 有类似的 Fuler 公式（Euler 乘积）.

引理6. 当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时，等式

$$L(s, \chi) = \prod_{p} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \tag{6}$$

成立.

证. 对 $X > 1$，考虑函数

$$\Phi(s, \chi) = \prod_{p \leqslant X} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

因为 $\operatorname{Re} s > 1$，所以

$$\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} + \cdots;$$

由此推得

$$\Phi(s, X) = \prod_{p \leqslant X} \left\{1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} + \cdots\right\}$$

$$= \sum_{n \leqslant X} \frac{\chi(n)}{n^s} + R(s, X) \tag{7}$$

(利用$\chi(n)$的可乘性及自然数的素因子展开式的唯一性)．其次，

$$|R(s,X)| \leqslant \sum_{n>X} \frac{1}{n^\sigma} < \int_{[X]}^{\infty} \frac{du}{u^\sigma} = \frac{1}{\sigma-1}[X]^{1-\sigma},$$

这里 $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$．对式(7)取极限 $X \to +\infty$，就得到引理的结论．

从式(6)可得

$$\left|\frac{1}{L(s,\chi)}\right| = \left|\prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$$

$$< 1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^\sigma} = 1 + \frac{1}{\sigma-1},$$

$$|L(s,\chi)| > \frac{\sigma-1}{\sigma},$$

即当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时，$L(s,\chi) \neq 0$．若模 k 的特征 χ 是主特征，则 $L(s,\chi)$ 和 $\zeta(s)$ 仅相差若干个素因子．

引理 7. 设 $\chi(n)$ 是模 k 的主特征 $\chi_0(n)$，则当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时，

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

证. 由式(6)及主特征 $\chi_0(n)$ 的定义即可推得引理．

推论. 除去点 $s=1$ 外，$L(s,\chi_0)$ 是整个 s 平面上的解析函数，$s=1$ 是它的简单极点，留数为

$$\prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

若 $\chi(n)$ 是非原特征，$\chi_1(n)$ 是对应于 $\chi(n)$ 的模 k_1 的原特征，$k_1|k$，则 $L(s,\chi)$ 和 $L(s,\chi_1)$ 仅相差若干个素因子．

引理 8. 设 χ_1 是模 k_1 的原特征，χ 是由 χ_1 导出的模 k 的非原特征，$k_1 \neq k$．那么，当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时，

$$L(s,\chi) = L(s,\chi_1) \prod_{\substack{p|k \\ p\nmid k_1}} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right).$$

证. 由式(6)及 χ_1 和 χ 的性质即推得引理．

容易把函数 $L(s, \chi)$ 开拓到半平面 $\operatorname{Re} s > 0$。

引理 9. 设 $\chi \neq \chi_0$，则当 $\operatorname{Re} s > 0$ 时，等式

$$L(s, \chi) = s\int_1^{\infty} S(x) x^{-s-1} dx, \tag{8}$$

成立，其中

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} \chi(n).$$

证. 设 $N \geqslant 1$，$\operatorname{Re} s > 1$。利用 Abel 变换（第三章引理 3）可得

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n^s} = 1 + s\int_1^N c(x) x^{-s-1} dx + \frac{c(N)}{N^s},$$

其中

$$c(x) = S(x) - 1.$$

取极限 $N \to +\infty$，这样，当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时，就得到了式(8)。但是，$|S(x)| \leqslant \varphi(k)$，所以式 (8) 中的积分在半平面 $\operatorname{Re} s > 0$ 内收敛，并确定了一个解析函数，这就是所要证明的[1]。

推论. 当 $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}$，$\chi \neq \chi_0$ 时，估计

$$|L(s, \chi)| \leqslant 2|s|\varphi(k)$$

成立。

对式 (6) 二边取对数后微商，得到

引理 10. 当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时，等式

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s} \tag{9}$$

成立。

现在对式 (9) 应用第四章定理 1，取 $b = 1 + \frac{1}{\ln x}$，$\alpha = 1$，$T \geqslant 2$，可得

---

1) 这里应先指出 $L(s, \chi)$ 可以由式 (8) 开拓到 $\operatorname{Re} s > 0$。——译者注

$$\psi(x, \chi) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\chi(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}\right)$$

$$\times \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right), \tag{10}$$

另外，当 $(k, l) = 1$ 时，

$$\psi(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \psi(x, \chi)\bar{\chi}(l).$$

这样一来，为了知道 $\psi(\chi; k, l)$ 的性质，就需要知道所有对应于模 k 的特征 χ 的 $\psi(x, \chi)$ 的性质，即需要知道式 (10) 中的积分的性质，而为了研究式 (10) 中的积分，就需要有关于 $L(s, \chi)$ 的一些知识，这些知识和第三、四章中所讨论的关于 $\zeta(s)$ 的那些知识相同.

我们可以按照研究 $\zeta(s)$ 的同样的格式来研究 $L(s, \chi)$，然而，这里有它的特殊困难．我们首先将把所有的 $L(s, \chi)$ 开拓到整个 s 平面；再证明相应于它的函数 $\xi(s, \chi)$ 是一阶整函数，并对 $\xi(s,\chi)$ 应用第一章定理 5.

§3. 函 数 方 程

我们将先导出对应于原特征 χ 的 $L(s, \chi)$ 的函数方程，由此及引理 8 就把对应于任意特征 χ 的 $L(s, \chi)$ 开拓到了整个 s 平面．函数方程的形式依赖于特征 χ 是偶的或奇的，即 $\chi(-1) = +1$，或 $\chi(-1) = -1$.

在导出 $L(s, \chi)$ 的函数方程及把它开拓到整个 s 平面之前，我们先要证明一个类似于 $\theta(x)$ 的函数方程（见第三章引理 2）的辅助命题.

引理 11. 设 χ 是模 k 的原特征．对于偶特征 χ，定义函数

$$\theta(x, \chi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{k}}, \quad x > 0,$$

而对于奇特征 χ，定义函数

$$\theta_1(x, \chi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\chi(n) e^{-\frac{n^2\pi x}{k}}, \quad x > 0.$$

那么，对于所引进的函数 $\theta(x, \chi)$ 和 $\theta_1(x, \chi)$ 分别有关系式（函数方程）

$$\tau(\chi)\theta(x, \chi) = \sqrt{\frac{k}{x}}\, \theta\left(\frac{1}{x}, \quad \overline{\chi}\right), \tag{11}$$

和

$$\tau(\overline{\chi})\theta_1(x, \chi) = i\sqrt{\frac{k}{x^3}}\, \theta_1\left(\frac{1}{x}, \quad \overline{\chi}\right) \tag{12}$$

成立，其中 $\tau(\chi)$ 为 Gauss 和.

证. 我们要利用第三章引理 2 中证明的等式

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi(n+\alpha)^2}{x}} = \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x + 2\pi i n\alpha}, \tag{13}$$

其中 $x > 0$，α 是实数.

利用性质 5 及上式我们有

$$\begin{aligned}
\tau(\overline{\chi})\theta(x, \chi) &= \sum_{m=1}^{k} \overline{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi x}{k} + \frac{2\pi i m n}{k}} \\
&= \sum_{m=1}^{k} \overline{\chi}(m) \sqrt{\frac{k}{x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k\pi\left(n+\frac{m}{k}\right)^2}{x}} \\
&= \sqrt{\frac{k}{x}} \sum_{m=1}^{k} \overline{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi(kn+m)^2}{kx}} \\
&= \sqrt{\frac{k}{x}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{\chi}(m) e^{-\frac{\pi m^2}{kx}} \\
&= \sqrt{\frac{k}{x}}\, \theta\left(\frac{1}{x}, \overline{\chi}\right),
\end{aligned}$$

这就证明了等式 (11).

为了证明等式 (12)，我们逐项微商（对变量 α）等式(13)，并以 x/k 代 x；m/k 代 α（该级数之所以可以逐项微商，是因为逐项微商

后所得的级数是一致收敛的)，得到

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n e^{-\frac{\pi n^2 x}{k}+\frac{2\pi i m n}{k}} = i\sqrt{\frac{k}{x^3}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(kn+m)e^{-\frac{\pi(kn+m)^2}{kx}}.$$

同上面一样，由此推得

$$\tau(\overline{\chi})\theta_1(x,\chi) = \sum_{m=1}^{k}\overline{\chi}(m)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n e^{-\frac{n^2\pi x}{k}+\frac{2\pi i m n}{k}}$$

$$= i\sqrt{\frac{k}{x^3}}\sum_{m=1}^{k}\overline{\chi}(m)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(kn+m)e^{-\frac{\pi(kn+m)^2}{kx}}$$

$$= i\sqrt{\frac{k}{x^3}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\overline{\chi}(n)e^{-\frac{\pi n^2}{kx}} = i\sqrt{\frac{k}{x^3}}\theta_1\left(\frac{1}{x},\ \overline{\chi}\right).$$

引理证毕.

定理 1 (函数方程). 设 χ 是模 k 的原特征.

$$\delta = \begin{cases}0, & \chi(-1) = +1;\\ 1, & \chi(-1) = -1;\end{cases}$$

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+\delta}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s,\chi).$$

那么，等式

$$\xi(1-s,\overline{\chi}) = \frac{i^{\delta}\sqrt{k}}{\tau(\chi)}\xi(s,\chi) \tag{14}$$

成立.

证. 定理的证明实质上是重复 ζ 函数的函数方程 (第三章定理 1) 的推导.

假定 $\chi(-1) = +1$. 我们有

$$\pi^{-\frac{s}{2}}k^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n^{-s} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi x}{k}}x^{\frac{s}{2}-1}dx.$$

上式乘以 $\chi(n)$ 并对 n 求和，当 $\mathrm{Re}\, s > 1$ 时，得到

$$\pi^{-\frac{s}{2}}k^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)L(s,\chi) = \int_0^{\infty}x^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)e^{-\frac{n^2\pi x}{k}}\right)dx.$$

由于 χ 是偶特征，故有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-\frac{n^2\pi x}{k}} = \frac{1}{2}\theta(x, \chi);$$

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s, \chi) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x, \chi) dx.$$

把上式中的积分分为两部分，对其中之一作积分变量替换 $\left(x \to \frac{1}{x}\right)$，并利用式 (11)，得到

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s, \chi) \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x, \chi) dx + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-1}\theta\left(\frac{1}{x}, \chi\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x, \chi) dx + \frac{1}{2}\frac{\tau(\chi)}{\sqrt{k}}\int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\theta(x, \overline{\chi}) dx. \quad (15)
\end{aligned}$$

对任意的 s，这等式的右边是解析函数，因而，也就给出了 $L(s,\chi)$在整个 s 平面上的解析开拓．因为 $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \neq 0$，所以 $L(s,\chi)$ 是处处正则的函数．其次，因为 $\chi(-1) = 1$，以及由此推得的 $\tau(\chi)\tau(\overline{\chi}) = \tau(\chi)\overline{\tau(\chi)} = k$，故当在式 (15) 中以 $1-s$ 代 s，$\overline{\chi}$ 代 χ 时，其结果只要在式 (15) 的右边乘以$\sqrt{k}/\tau(\chi)$．因此，当 $\delta = 0$ 时，就得到了定理的结论．

假定 $\chi(-1) = -1$．我们有

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) n^{-s} = \int_0^{\infty} n e^{-\frac{\pi n^2 x}{k}} x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dx,$$

于是，当 $\mathrm{Re}\, s > 1$ 时，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s, \chi) &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\theta_1(x, \chi) x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\theta_1(x, \chi) x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dx + \frac{\tau(\chi)}{2i\sqrt{k}}\int_1^{\infty}\theta_1(x, \overline{\chi}) x^{-\frac{s}{2}} dx.
\end{aligned}$$

上式就给出了 $L(s, \chi)$ 在整个 s 平面上的正则开拓；由于

$$\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = -k,$$

所以，当以 $1-s$ 代 s，$\bar{\chi}$ 代 χ 时，其结果只要在前式的右边乘以 $i\sqrt{k}/\tau(\chi)$. 由此，当 $\delta=1$ 时，就亦得到了定理的结论. 定理证毕.

推论. $\xi(s, \chi)$ 是整函数；若 $\chi(-1) = +1$，则当 $\mathrm{Re}\, s \leqslant 0$ 时，$L(s, \chi)$ 以且仅以 $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ 的极点为其零点，即是点 $s=0, -2, -4, \cdots$；若 $\chi(-1) = -1$，则当 $\mathrm{Re}\, s \leqslant 0$ 时，$L(s, \chi)$ 以且仅以 $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ 的极点为其零点，即是点 $s=-1, -3, -5, \cdots$.

下面(见第九章 §2)将证明，当 $\mathrm{Re}\, s=1$ 时，$L(s,\chi) \neq 0$. 特别的，有 $L(1, \chi) \neq 0$. 由此及式(14)就推得：当 $\mathrm{Re}\, s=0$ 时，$\xi(s, \chi) \neq 0$，特别的，有 $\xi(0, \chi) \neq 0$. 由此就得到推论.

§4. 非显然零点. 对数导数按零点展为级数

从定理 1 的推论可以看出，函数 $L(s, \chi)$ (χ 为原特征) 在半平面 $\mathrm{Re}\, s<0$ 内仅有实零点；这些零点是 $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ 或 $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ 的极点，并称为显然零点；零点 $s=0$ 亦称为显然零点. 除了显然零点外，和 ζ 函数一样，函数 $L(s, \chi)$ 在带形(临界带形) $0 \leqslant \mathrm{Re}\, s \leqslant 1$ 内有无穷多个非显然零点.

定理 2. 设 χ 是原特征. 那么，函数 $\xi(s, \chi)$ 是一级整函数，它有无穷多个零点 ρ_n，满足条件：$0 \leqslant \mathrm{Re}\, \rho_n \leqslant 1$，$\rho_n \neq 0$，而且，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\rho_n|^{-1}$ 发散，但对任意的 $\varepsilon > 0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\rho_n|^{-1-\varepsilon}$ 收敛. $\xi(s, \chi)$ 的零点是 $L(s, \chi)$ 的非显然零点.

证. 当 $\mathrm{Re}\, s \geqslant \frac{1}{2}$ 时，

$$|L(s, \chi)| \leqslant 2|s|\varphi(k) < 2|s|k;$$

$$|\xi(s, \chi)| \leqslant 2k^{\frac{\sigma}{2}+\frac{3}{2}}|s| \left|\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)\right| \ll k^{\frac{\sigma}{2}+\frac{3}{2}} e^{c|s|\ln|s|}.$$

由于函数方程 (14) 及等式

$$\left|\frac{i^{\delta}\sqrt{k}}{\tau(\chi)}\right| = 1,$$

所以，上面 $|\xi(s,\chi)|$ 的估计当 $\operatorname{Re}s < \frac{1}{2}$ 时亦成立；此外还有 $\xi(0,\chi) \neq 0$。由于当 $s \to +\infty$ 时，$\ln\Gamma(s) \sim s\ln s$，所以，从第一章定理 5 就推得定理的第一部分结论。因为，当 $\operatorname{Re}s > 1$ 时，$L(s,\chi) \neq 0$，故由式 (14) 推出，当 $\operatorname{Re}s < 0$ 时，$\xi(s,\chi) \neq 0$，即 $\xi(s,\chi)$ 的零点是 $L(s,\chi)$ 位于带形 $0 \leqslant \operatorname{Re}s \leqslant 1$ 上的非显然零点。定理证毕。

推论. 公式

$$\xi(s,\chi) = e^{A+Bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)e^{\frac{s}{\rho_n}} \tag{16}$$

成立，其中 $A = A(\chi)$，$B = B(\chi)$ 为常数。

从式(14)可推出，$L(s,\chi)$ 的非显然零点对称于直线 $\operatorname{Re}s = \frac{1}{2}$。今后，我们总假定零点 ρ_n，$n = 1, 2, \cdots$，是按它们的虚部的绝对值的递增顺序排列。

下述辅助命题建立了常数 $B = B(\chi)$ 和 $L(s,\chi)$ 的非显然零点之间的联系。

引理 12. 在定理 2 推论的符号下，等式

$$\operatorname{Re}B(\chi) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\bar{\rho}_n}\right) = 0 \tag{17}$$

成立。

证. 对式 (16) 的二边取对数微商，并应用式 (14) 得：

$$B(\chi) = \frac{\xi'(0,\chi)}{\xi(0,\chi)} = -\frac{\xi'(1,\bar{\chi})}{\xi(1,\bar{\chi})}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\bar{\rho}_n} + \frac{1}{\bar{\rho}_n}\right) - B(\bar{\chi}).$$

因为

$$L(\rho_n,\chi) = L(1-\rho_n,\bar{\chi}) = L(\bar{\rho}_n,\bar{\chi}) = L(1-\bar{\rho}_n,\chi) = 0,$$

所以 ρ_n 和 $1-\bar{\rho}_n$ 均为 $L(s,\chi)$ 的零点。由此即得引理的结论。

§ 5. 关于零点的最简单的定理

我们来证明几个有关 $L(s,\chi)$ 的非显然零点的简单结论，这些结论同关于 ζ 函数零点的对应的结论相类似。

定理 3. 设 $\rho_n=\beta_n+i\gamma_n$，$n=1,2,\cdots$，是 $L(s,\chi)$ 的所有非显然零点，χ 是模 k 的原特征，$T\geqslant 2$[1]. 那么，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2}\leqslant c\log kT.$$

证. 当 $s=2+iT$ 时有（$\delta=0$ 或 1）

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+\delta+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{n\leqslant T}\frac{1}{n}+\sum_{n>T}\frac{|s|}{n^2}\leqslant c_1\log T;$$

从式 (16) 和式 (14) 得到

$$-\mathrm{Re}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\frac{1}{2}\log\frac{k}{\pi}-\mathrm{Re}B(\chi)-\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right)$$

$$-\frac{\gamma}{2}-\mathrm{Re}\frac{1}{s+\delta}-\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+\delta+2n}-\frac{1}{2n}\right);$$

由此及式 (17) 得到

$$\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s-\rho_n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2}+c_2\log kT<c_3\log kT;$$

此外还有，

$$\mathrm{Re}\frac{1}{s-\rho_n}=\mathrm{Re}\frac{1}{(2-\beta_n)+i(T-\gamma_n)}$$

$$=\frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2+(T-\gamma_n)^2}\geqslant\frac{1}{4+(T-\gamma_n)^2}.$$

---

1) 条件 $T\geqslant 2$ 可以不要，只要在不等式中用 $\log k(|T|+2)$ 来代替 $\log kT$，定理仍然成立。——译者注

综合以上两个估计，就推出定理的结论。

在定理 3 的条件和符号下，下述两个推论成立，

推论 1. 满足条件

$$T \leqslant |\mathrm{Im}\rho_n| \leqslant T+1$$

的零点 ρ_n 的个数不超过 $2c\log kT$。

推论 2. 估计式

$$\sum_{|T-\gamma_n|>1} \frac{1}{(T-\gamma_n)^2} \leqslant 2c_1 \log kT.$$

定理 4. 当 $-1 \leqslant \sigma \leqslant 2$, $s=\sigma+it$, $|t| \geqslant 2$ 时，等式

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{|t-\gamma_n|\leqslant 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\log k|t|)$$

成立，这里求和号是表示对 $L(s,\chi)$ (χ 为原特征) 的满足条件 $|t-\mathrm{Im}\,\rho_n| = |t-\gamma_n| \leqslant 1$ 的所有零点求和。

证. 同证明定理 3 一样，我们有

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right) + B(\chi) - \frac{1}{2}\log\frac{k}{\pi}$$

$$+\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{s+\delta}+O(\log|t|),$$

其中 $s=\sigma+it$, $|t| \geqslant 2$, $-1 \leqslant \sigma \leqslant 2$.

从这一关系式中减去当 $s=2+it$ 时的同一关系式，就得到

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}-\frac{1}{2+it-\rho_n}\right)+O(\log|t|).$$

若 $|\gamma_n - t| > 1$, 则

$$\left|\frac{1}{\sigma+it-\rho_n}-\frac{1}{2+it-\rho_n}\right| \leqslant \frac{2-\sigma}{(\gamma_n-t)^2} \leqslant \frac{3}{(\gamma_n-t)^2},$$

由以上两式，利用推论 1 及 2 即推出定理的结论。

问　　题

关于多项式的 Legendre 符号的和(С. А. Степанов)

1. 设 K_p 是素数模 $p \geqslant 3$ 的剩余类域，$K_p[x]$ 是系数在 K_p 中

的变数 x 的多项式环. 证明：对任意的 $f(x)\in K_p[x]$，方程

$$1\pm f^{\frac{p-1}{2}}(x)=0$$

的所有的解 $x\in K_p$ 至少是多项式

$$R(x)=2f(x)(1\pm f^{\frac{p-1}{2}}(x))+(x^p-x)\frac{df(x)}{dx}$$

的二重根. 由此推出，对于椭圆型同余方程 $y^2\equiv x^3+ax+b \pmod p$，$p\geqslant 3$，的解数 N_p 有估计式

$$|N_p-p|\leqslant\frac{p+3}{2}.$$

2. 设 $f(x)\in K_p[x]$ 是异于零的 n 次多项式，有理函数 $F_k^{(j)}(x)$，$j=1,2,\cdots$；$k=1,2,\cdots,j$，由下面的递推关系式给出：

$$F_j^{(j)}=2^{j-1}j!f^{-1}\frac{df}{dx},$$

$$F_k^{(j)}=2\frac{d}{dx}F_k^{(j-1)}+2(k-1)F_{k-1}^{(j-1)}+f^{-1}F_k^{(j-1)}\frac{df}{dx},\quad 1\leqslant k<j.$$

证明 $F_k^{(j)}(x)$ 可以表为

$$F_k^{(j)}=\frac{P_k^{(j)}}{f^{j-k+1}},$$

这里，$P_k^{(j)}\in K_p[x]$，$P_k^{(j)}(x)$ 的次数 $\leqslant(n-1)(j-k+1)$.

3. 设 $p\geqslant 3$，$N<\frac{p}{2}$，$i\geqslant 0$，

$$R_i(x)=(1\pm f^{\frac{p-1}{2}}(x))\sum_{j=1}^{2N}r_j^{(i)}(x)(x^p-x)^{j-1}$$

$$+\sum_{j=1}^{2N}t_j^{(i)}(x)(x^p-x)^j,$$

其中 $f(x)\in K_p[x]$，$r_j^{(i)}(x)$，$t_j^{(i)}(x)$ 是系数在K_p中的有理函数(参看问题 2). 试对 s，$1\leqslant s\leqslant 2N$，用归纳法证明：为了使得

$$R_{i+l}(x)=2^l\frac{d^l}{dx^l}R_i(x),\quad l=1,2,\cdots,$$

可以表为

$$R_{i+l}(x)=(1\pm f^{\frac{p-1}{2}}(x))\sum_{j=1}^{2N} r_j^{(i+l)}(x)(x^p-x)^{j-1}$$

$$+\sum_{j=1}^{2N} t_j^{(i+l)}(x)(x^p-x)^j$$

的形式,其中

$$r_j^{(i+l)}=2\frac{d}{dx}r_j^{(i+l-1)}-2jr_{j+1}^{(i+l-1)}-f^{-1}r_j^{(i+l-1)}\frac{df}{dx},$$

$$t_j^{(i+l)}=2\frac{d}{dx}t_j^{(i+l-1)}-2(j+1)t_{j+1}^{(i+l-1)}+f^{-1}r_{j+1}^{(i+l-1)}\frac{df}{dx},$$

$$l=1,\cdots,s,$$

$$r_j^{(i)}=t_j^{(i)}=0,\quad j>2N,$$

只要关系式

$$2^j j!t_j^{(i)}=\sum_{k=1}^{j}F_k^{(j)}r_k^{(i)},\ j=1,\cdots,s,$$

成立,其中 $F_k^{(j)}$ 是在问题 **2** 中定义的有理函数。

4. 在问题 3 的符号下,证明: 若 $f(x)$ 是 n 次奇次多项式,$n<p$,那么,对任意的多项式 $r_j^{(i)}(x)$,$t_j^{(i)}(x)$,只要它们中有一个不为零,以及它们的次数 $<\frac{p-n}{2}$,在环 $K_p[x]$ 内就必有 $R_i(x)\neq 0$。

5. 设 $p\geqslant c_0(n)$,$N\leqslant c_1(n)\sqrt{p}$,以及 $f(x)\in K_p[x]$ 是 n 次奇次多项式。试利用问题2—4来构造一个多项式 $R_1(x)\in K_p[x]$,使其形式为

$$R_1(x)=(1\pm f^{\frac{p-1}{2}}(x))\sum_{j=1}^{N} r_j^{(1)}(x)(x^p-x)^{j-1}$$

$$+\sum_{j=1}^{N} t_j^{(1)}(x)(x^p-x)^j,$$

并具有下述性质:

a) 在环 $K_p[x]$ 内，$R_1(x) \neq 0$；

b) 多项式 $r_j^{(1)}(x)$，$t_j^{(1)}(x)$ 的次数不超过 $c_2(n)N^2$；

c) 方程 $1 \pm f^{\frac{p-1}{2}}(x) = 0$ 的所有的解 $x \in K_p$，都至少是多项式 $R_1(x)$ 的 $2N$ 重根。

比较多项式 $R_1(x)$ 的根的个数和它的次数，证明：对超椭圆型同余方程 $y^2 \equiv f(x) \pmod{p}$ 的解数 N_p，有估计式

$$|N_p - p| \leqslant c_3(n)\sqrt{p}.$$

6. 尽可能精确地计算问题 5 中的常数 $c_0(n)$，$c_1(n)$，$c_2(n)$ 及 $c_3(n)$（这些常数是多项式 $f(x)$ 的次数 n 的函数）。

平方剩余和非剩余的分布

7. (И. М. Виноградов)． 设 $V(X)$ 和 $N(X)$ 分别为区间 $[1, X]$ 上的模 p 的平方剩余和非剩余的个数，则

$$V(X) = \frac{1}{2}X + \theta\sqrt{p}\log p, \quad |\theta| \leqslant 1;$$

$$N(X) = \frac{1}{2}X + \theta_1\sqrt{p}\log p, \quad |\theta_1| \leqslant 1$$

（参看第八章引理 5）。

8. (И. М. Виноградов)． 假设当 $X \geqslant X_0 = X_0(p) \geqslant e^{\sqrt{\ln p}}$ 时，等式

$$V(X) = \frac{1}{2}X + O\left(\frac{X}{\ln X}\right)$$

成立．以 $n = n(p)$ 表示模 p 的（正的）最小平方非剩余，我们有

$$n \leqslant cX_0^{\frac{1}{\sqrt{e}}}\ln p$$

（在数 $1, 2, \cdots, Y$ 中的非剩余一定能被某个不小于 n 的素数整除）。

9. (H. Davenport)． 当 $k \geqslant 1$，$1 \leqslant Z < p$ 时，不等式

$$\sum_{\lambda=1}^{p}\left|\sum_{m=1}^{Z}\left(\frac{\lambda+m}{p}\right)\right|^{2k} \leqslant c_4(k)(pZ^k + \sqrt{p}Z^{2k})$$

成立(利用问题 5).

10. 设 $p^{0.5+\varepsilon} < U < p$, $p^{\varepsilon} < V < p$, 以及

$$W = \sum_{u}^{U} \sum_{v}^{V} \left(\frac{u+v}{p} \right),$$

其中 u 和 v 分别取 U 个和 V 个对模 p 两两不同余的值. 那么, 有

$$|W| \leqslant cUVp^{-\delta}, \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0.$$

11. (D. Burgess). 设 $X \geqslant p^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$. 那么有

$$\left| \sum_{m \leqslant X} \left(\frac{m}{p} \right) \right| < c(\varepsilon) X p^{-\delta}, \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0.$$

(在和式中作变换 $m \to m + kl$, 并利用性质:

$$\left(\frac{n+kl}{p} \right) = \left(\frac{k}{p} \right) \left(\frac{nk_1 + l}{p} \right), \; kk_1 \equiv 1 \pmod p \Bigg).$$

12. (D. Burgess). 对于模 p 的(正的)最小平方非剩余 $n = n(p)$, 估计式

$$n = n(p) = O(p^{\frac{1}{4\sqrt{e}}+\varepsilon})$$

成立(参看问题 8 和 11).

13. 设 x_r 是一实数叙列, 满足条件 $(x_r - x_m) > \delta > 0$, $r \neq m$. 那么, 对任意的 a_n 有

$$\sum_{r=1}^{R} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e^{2\pi i n x_r} \right|^2 \leqslant c \left(N + \frac{1}{\delta} \right) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2$$

(参看第七章的引理).

14. 证明: 在所有的 $p \leqslant x$ 中, 对于 $\pi(x)\{1 + o(1)\}$ 个值 p, 它们的(正的)最小平方非剩余 $n = n(p)$ 及(正的)最小平方素剩余 $\nu = \nu(p)$ (ν 为素数)都不超过 $c\log^{2+\varepsilon} x$ (考虑 $\sum_{p<x} \left| \sum_{q \leqslant Y} \left(\frac{q}{p} \right) \right|^{2k}$, q 为素数, 并利用问题 13).

15. (А. Ф. Лаврик). 证明: 若 χ 是模 k 的原特征, $|\arg \eta| \leqslant \pi/2$, 则有(利用第八章的符号)

$$\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2},\frac{\pi\eta n^2}{k}\right)$$

$$+\frac{i^{\delta}\sqrt{k}}{\tau(\chi)}\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}}\Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2},\frac{\pi n^2}{k\eta}\right),$$

其中$\Gamma(z,x)$是不完全Γ函数(参看第三章问题 3)。

由此推出函数$L(s,\chi)$的渐近函数方程。

第九章　算术数列中的素数

利用复积分方法及第八章中所证明的有关 L 级数的结果，可以得到确立函数 $\Lambda(n)$ 在给定的算术数列上的值的和与 L 级数的零点之间关系的明显的公式，这种类型的公式通常称为显式．从这个显式以及关于 L 级数的零点界限(边界)的定理，就可推得算术数列中素数分布的渐近公式．

§1. 显　式

先引进两个同 Чебышев ψ 函数相类似的函数．

定义．设 χ 是模 k 的任意一个特征．函数 $\psi(x,\chi)$ 及 $\psi(x;k,l)$, $1\leqslant l\leqslant k$, $(l,k)=1$, 由下面的等式给出：

$$\psi(x,\chi)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n),$$

$$\psi(x;k,l)=\sum_{\substack{n\equiv l(\mathrm{mod}\,k)\\ n\leqslant x}}\Lambda(n).$$

由特征的正交性（第八章性质 4）可得到，

$$\psi(x;k,l)=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi\,\mathrm{mod}\,k}\psi(x,\chi)\overline{\chi}(l)$$

$$=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,k)=1}}\Lambda(n)+\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\psi(x,\chi)\overline{\chi}(l). \quad (1)$$

第一项与 $\dfrac{1}{\varphi(k)}\psi(x)$ 之差为

$$\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,k)>1}}\Lambda(n)\leqslant\frac{1}{\varphi(k)}\ln^2x.$$

其次，若 χ_1 是对应于特征 χ 的模 k_1 的原特征，$k_1|k$，则由 χ_1 的性

质得

$$\psi(x, \chi) = \psi(x, \chi_1) + \theta \sum_{\substack{n \le x \\ (n,k)>1}} \Lambda(n) = \psi(x, \chi_1) + \theta_1 \log^2 x,$$

$$|\theta| \leqslant 1, \quad |\theta_1| \leqslant 1.$$

这样，就把研究 $\psi(x; k, l)$ 归结为研究 $\psi(x, \chi_1)$，这里，χ_1 是模 k_1 的原特征，$k_1|k$. 以下总假定 $k \leqslant x$.

定理 1. 设 χ 是模 k 的原特征，$2 \leqslant T \leqslant x$，则

$$\psi(x, \chi) - \psi(k, \chi) = -\sum_{|\mathrm{Im}\rho| \leqslant T} \frac{x^\rho - k^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right),$$

其中 ρ 为 $L(s, \chi)$ 的非显然零点.

证. 由第八章推论 1 知，可以找到 T_1，$T \leqslant T_1 \leqslant T+1$，使得

$$|T_1 - \mathrm{Im}\rho_n| > \frac{1}{c \log kT},$$

这里 ρ_n 为 $L(s, \chi)$ 的任一零点. 考虑以 $b - iT_1$，$b + iT_1$，$-\frac{1}{2} + iT_1$，$-\frac{1}{2} - iT_1$ 为顶点的矩形 Γ，其中 $b = 1 + \frac{1}{\log x}$. 函数 $\frac{x^s}{s} \frac{d}{ds}(\ln L(s, \chi))$ 沿围道 Γ 积分，得到

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left\{-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}\right\} \frac{x^s - k^s}{s} ds = -\sum_{|\mathrm{Im}\rho| \leqslant T_1} \frac{x^\rho - k^\rho}{\rho} + \theta \ln x,$$

其中 $|\theta| \leqslant 1$. 根据第四章定理 1 $\left(\alpha = 1, \ x = N + \frac{1}{2}\right)$，有

$$\psi(x, \chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b - iT_1}^{b + iT_1} \left\{-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}\right\} \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right).$$

余下还要估计在矩形 Γ 的上，下和左三边上的积分. 在 Γ 的上，下二边上的积分可同样地加以估计. 利用第八章定理 4，对所选取的 T_1，我们得到

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{1}{2} + iT_1}^{b + iT_1} \left\{-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}\right\} \frac{x^s}{s} ds\right| \leqslant \frac{e}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{b} \left|\frac{L'(\sigma + iT_1, \chi)}{L(\sigma + iT_1, \chi)}\right| \frac{x}{T_1} d\sigma$$

$$= \frac{e}{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{b}\left|\sum_{|T_1-\gamma_n|\leqslant 1}\frac{1}{\sigma-\sigma_n+i(T_1-\gamma_n)}+O(\log kT)\right|\frac{x}{T_1}\,d\sigma$$

$$= O\left(\frac{x\log^2 kT}{T}\right)=O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right).$$

在 Γ 的左边上的积分可这样来估计：从第八章式（14）可推得

$$\left|\frac{L'\left(-\frac{1}{2}+it,\chi\right)}{L\left(-\frac{1}{2}+it,\chi\right)}\right|=O(\ln k(|t|+2)),$$

所以，

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-T_1}^{+T_1}\left\{-\frac{L'\left(-\frac{1}{2}+it,\chi\right)}{L\left(-\frac{1}{2}+it,\chi\right)}\right\}\frac{x^{-\frac{1}{2}+it}}{-\frac{1}{2}+it}\,dt\right|$$

$$\leqslant x^{-\frac{1}{2}}\int_{-T_1}^{+T_1}\left|\frac{L'\left(-\frac{1}{2}+it,\chi\right)}{L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)}\right|\frac{dt}{\frac{1}{2}+|t|}=O\left(\frac{\log^2 kT}{\sqrt{x}}\right).$$

综合以上估计，即得定理的结论。

§2. 关于零点界限的定理

如同证明第三章定理5——关于 ζ 函数的零点边界一样， 这里亦将利用不等式

$$3+4\cos\varphi+\cos 2\varphi\geqslant 0,$$

φ 是实数，以及当 $s=\sigma+it$，$\chi=\chi_1$ 和 $s=\sigma+i2t$，$\chi=\chi_1^2$ 时，量

$$-\mathrm{Re}\,\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$$

的上界估计． 在这里，关于具有实特征 χ 的 $L(s,\chi)$ 的实零点的界限问题，引起了特殊的困难．

定理 2. 若 χ 是模 k 的复特征，$s=\sigma+it$，则 $L(s,\chi)$ 在区

域

$$\operatorname{Re} s=\sigma \geqslant 1-\frac{c}{\log k(|t|+2)}$$

中没有零点．若 χ 是模 k 的实特征，$s=\sigma+it$，则 $L(s,\chi)$ 在区域

$$\operatorname{Re} s=\sigma \geqslant 1-\frac{c}{\log k(|t|+2)}, \quad |t|>0$$

中没有零点．

证． 首先讨论 χ 是原特征的情形．设 χ 是复特征，$s=\sigma+it$，$\sigma>1$，$t \geqslant 0$；再设 $\chi(n)=e^{i\omega(n)}$，$(n,k)=1$，那么

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}{}' \Lambda(n) n^{-\sigma} e^{-it\log n+i\omega(n)};$$

$$-\operatorname{Re} \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\sum_{n=1}^{\infty}{}' \Lambda(n) n^{-\sigma} \cos\{t\log n-\omega(n)\},$$

$$-\operatorname{Re} \frac{L'(\sigma+i2t,\chi^2)}{L(\sigma+i2t,\chi^2)}=\sum_{n=1}^{\infty}{}' \Lambda(n) n^{-\sigma} \cos 2\{t\log n-\omega(n)\}.$$

这里“$'$”表示对 $(n,k)=1$ 求和．所以

$$3\left\{-\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)}\right\}+4\left\{-\operatorname{Re} \frac{L'(\sigma+it,\chi)}{L(\sigma+it,\chi)}\right\} +\left\{-\operatorname{Re} \frac{L'(\sigma+i2t,\chi^2)}{L(\sigma+i2t,\chi^2)}\right\} \geqslant 0. \tag{2}$$

利用第八章引理 12，及 $\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right|$ 的估计（例如，可参看第八章定理 3 的证明）来估计式 (2) 中每一项的上界：

$$-\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)}=\sum_{n=1}^{\infty} \chi_0(n)\Lambda(n) n^{-\sigma} \leqslant -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}<\frac{1}{\sigma-1}+c_1;$$

$$-\operatorname{Re} \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=-\operatorname{Re} \frac{L'(\sigma+it,\chi)}{L(\sigma+it,\chi)}$$

$$=\frac{1}{2} \log \frac{k}{\pi}-\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right)-\frac{\gamma}{2}-\operatorname{Re} \frac{1}{s+\delta}$$

$$-\operatorname{Re}B(\chi)-\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+\delta+2n}-\frac{1}{2n}\right)$$

$$\leqslant c_2\log k(t+2)-\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s-\rho_n}. \tag{3}$$

若以 χ_1 表示对应于 χ^2 的原特征，则 $\chi_1\neq\chi_0$，并有

$$\left|\frac{L'(s,\chi^2)}{L(s,\chi^2)}-\frac{L'(s,\chi_1)}{L(s,\chi_1)}\right|\leqslant\sum_{p|k}\frac{p^{-\sigma}\log p}{1-p^{-\sigma}}\leqslant\sum_{p|k}\log p\leqslant\log k.$$

因而，利用已得的估计 (3)，有

$$-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+i2t,\chi^2)}{L(\sigma+i2t,\chi^2)}\leqslant-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+i2t,\chi_1)}{L(\sigma+i2t,\chi_1)}$$

$$+\log k\leqslant c_3\log k(t+2). \tag{4}$$

因为，$\operatorname{Re}\dfrac{1}{s-\rho}=\dfrac{\sigma-\beta}{|s-\rho|^2}\geqslant 0$，所以，

$$\frac{3}{\sigma-1}-4\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho}+c\log k(t+2)\geqslant 0. \tag{5}$$

现在设 $\rho=\beta+i\gamma$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点；不失一般性，可假定 $\gamma\geqslant 0$。在式 (5) 中取 $t=\gamma$，$\sigma=1+\dfrac{1}{2c\log k(t+2)}$，就得到

$$\beta\leqslant 1-\frac{1}{14c\log k(\gamma+2)}.$$

现在，我们对实原特征 χ 来证明定理的结论．这时有 $\chi^2=\chi_0$，及

$$\left|\frac{L'(s,\chi^2)}{L(s,\chi^2)}-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|\leqslant\log k;$$

由第三章定理 3 和 4 知，

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}<\operatorname{Re}\frac{1}{s-1}+c_3\log(t+2).$$

把这一估计和估计 (3) 代入式 (2)，并取 $t=\gamma$，这里 $\rho=\beta+i\gamma$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，$\gamma\geqslant 0$，我们得到

$$\frac{3}{\sigma-1}-\frac{4}{\sigma-\beta}+\operatorname{Re}\frac{1}{\sigma-1+i2\gamma}+c_4\log k(\gamma+2)\geqslant 0;$$

$$\mathrm{Re}\frac{1}{\sigma-1+i2\gamma}=\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4\gamma^2};$$

$$\frac{4}{\sigma-\beta}\leqslant\frac{3}{\sigma-1}+\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4\gamma^2}+c_4\log k(\gamma+2).$$

现分两种情形来讨论——γ 大的情形和 γ 小的情形．先设 $\gamma>\frac{\kappa}{\log k}$，这里 κ 是一待定的常数，$0<\kappa<\frac{1}{5c_4}$．取

$$\sigma=1+\frac{\kappa}{\log k(\gamma+2)},$$

就得到

$$\beta\leqslant 1-\frac{c_5}{\log k(\gamma+2)},\qquad c_5\geqslant\frac{3}{5c_4+16\kappa^{-1}}.$$

再设 $0<\gamma<\frac{\kappa}{\log k}$．这时，利用式 (3)，并注意到 $L(s,\chi)$ 的零点 ρ 有形式 $\rho=\beta+i\gamma$，得到

$$-\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)}\leqslant c_2\log 2k-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma-\rho_n}\leqslant c_2\log 2k$$
$$-\frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2},\tag{6}$$

其次

$$-\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)}=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\Lambda(n)n^{-\sigma}\geqslant-\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma}$$
$$=\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}>-\frac{1}{\sigma-1}-c_6.$$

由此及式 (6) 得到

$$\frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2}<\frac{1}{\sigma-1}+c_7\log k.$$

设 $\lambda<\frac{2}{3c_7}$.取 $\sigma=1+\frac{\lambda}{\log k}$，$\kappa=\frac{\lambda}{10}$,那么,由这不等式就推得

$$\beta\leqslant 1-\frac{\lambda}{10\log k}.$$

这样，就对原特征 χ 证明了定理[1]. 从所证明的结果及第八章引理 8 就推得，对任意特征 χ 定理都成立.

现在，我们转入研究具有实原特征 χ 的 $L(s, \chi)$ 的实零点的分布. 至今，对这种零点所得到的界限，比定理 2 所得到的结果要粗糙得多. 首先，我们来估计 $L(1, \chi)$ 的下界.

引理 1. 设 χ 是模 k 的实原特征，则

$$L(1, \chi) \geqslant \frac{c}{\sqrt{k} \log^2 k}.$$

证. 利用特征和估计(第八章引理 5)，及 Abel 变换(第三章引理 3)，得到 $(m > 0)$

$$\left|\sum_{m<n\leqslant M} \frac{\chi(n)}{n}\right| = \left|\int_m^M \left(\sum_{m<n\leqslant M} \chi(n)\right) x^{-2} dx + \frac{1}{M} \sum_{m<n\leqslant M} \chi(n)\right|$$

$$\leqslant c_1 \frac{\sqrt{k} \log k}{m};$$

$$\left|L(1, \chi) - \sum_{n\leqslant x} \frac{\chi(n)}{n}\right| \leqslant c_1 \frac{\sqrt{k} \log k}{x}.$$

考虑函数 $H(t)$, $\frac{1}{2} \leqslant t < 1$,

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n, \quad a_n = \sum_{d|n} \chi(d).$$

若 $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_u^{\alpha_u}$ 是 n 的标准素因子展开式，则

$$a_n = \prod_{r=1}^{u} (1 + \chi(p_r) + \cdots + \chi(p_r^{\alpha_r}));$$

所以，$a_n \geqslant 0$, $a_{m^2} \geqslant 1$. 由此推出

$$H(t) > \sum_{m=1}^{\infty} t^{m^2} > \int_1^{\infty} t^{u^2} du > \int_0^{\infty} t^{u^2} du - 2$$

---

1) 不难看出，用同样的方法可证明，当 χ 为实特征时，在区间 $\left[1 - \frac{c}{\log k}, 1\right]$ 上，$L(s, \chi)$ 不可能有二个实零点或一个高于一级的零点，即 $L(s, \chi)$ 至多可能有一个一级实零点。——译者注

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln(1-(1-t))}}-2>\frac{1}{2\sqrt{1-t}}-2.$$

其次，

$$H(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{n|m}\chi(n)\Big)t^m=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\sum_{r=1}^{\infty}t^{rn}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)t^n}{1-t^n}.$$

我们来估计差 $H(t)-\frac{L(1,\chi)}{1-t}=G(t)$ 的上界，

$$G(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\frac{t^n}{1-t^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n}\frac{t^n}{1-t}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(S_n-S_{n+1})\frac{t^n}{1-t}-\frac{L(1,\chi)}{1-t}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\left\{\frac{t^n}{1-t^n}-\frac{t^n}{n(1-t)}\right\}-\sum_{n=0}^{\infty}S_{n+1}t^n,$$

其中 $S_n=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{\chi(m)}{m}$。我们有

$$|S_n|\leqslant\frac{c_1\sqrt{k}\log k}{n},$$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}S_{n+1}t^n\right|<c_1\sqrt{k}\log k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=c_1\sqrt{k}\log k\log\frac{1}{1-t};$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\left\{\frac{t^n}{1-t^n}-\frac{t^n}{n(1-t)}\right\}\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m=1}^{n}\chi(m)\Big)\left\{\frac{t^n}{1-t^n}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{t^n}{n(1-t)}-\frac{t^{n+1}}{1-t^{n+1}}+\frac{t^{n+1}}{(n+1)(1-t)}\right\}\right|\leqslant\frac{c_1\sqrt{k}\log k}{1-t}$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{t^n}{1+t+\cdots+t^{n-1}}-\frac{t^{n+1}}{1+t+\cdots+t^n}-\frac{t^n}{n(n+1)}\right.$$

$$\left.-\frac{(1-t)t^n}{n+1}\right|<\frac{c_1\sqrt{k}\log k}{1-t}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{t^n}{1+t+\cdots+t^{n-1}}$$

$$-\frac{t^{n+1}}{1+t+\cdots+t^n}-\frac{t^n}{n(n+1)}\Big)+c_1\sqrt{k}\log k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n+1}$$

$$<2c_1\sqrt{k}\log k\log\frac{1}{1-t}.$$

所以，得到

$$|G(t)|<3c_1\sqrt{k}\log k\log\frac{1}{1-t}.$$

由此推出，

$$\frac{L(1,\chi)}{1-t}=H(t)-G(t)>\frac{1}{2\sqrt{1-t}}-3c_1\sqrt{k}\log k\log\frac{1}{1-t}.$$

取

$$t=1-\frac{1}{c_0k\log^4 k},$$

$$c_0=(64(c_1+1))^2;$$

就得到

$$\frac{L(1,\chi)}{1-t}>\frac{1}{4}\sqrt{c_0k}\,\log^2 k,$$

这就是所要证明的.

定理 3. (A. Page). 设 χ 是模 k 的实原特征. 那么，当

$$\sigma>1-\frac{c}{\sqrt{k}\log^4 k}$$

时，$L(\sigma,\chi)\neq 0$.

证. 设 σ 属于区间 $\left[1-\frac{1}{8\log k},\ 1\right]$. 由中值定理知，

$$L(1,\chi)=L(\sigma,\chi)+(1-\sigma)L'(\sigma_1,\chi),$$

其中 $\sigma\leqslant\sigma_1\leqslant 1$. 应用 Abel 变换(第三章引理 3)及特征和估计(第八章引理 5)，得到

$$|L'(\sigma_1,\chi)|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\log n}{n^{\sigma_1}}\right|\leqslant\sum_{n\leqslant k}\frac{\log n}{n^{\sigma_1}}$$

$$+\int_k^{\infty}\left|\sum_{k<n\leqslant x}\chi(n)\right|\left(\frac{1}{x^{1+\sigma_1}}+\frac{\ln x}{x^{1+\sigma_1}}\right)dx\leqslant c_1\log^2 k.$$

由此及引理 1 可推得：若 $\sigma > 1 - \frac{c}{\sqrt{k}\log^4 k}$，$c > \frac{c_0}{c_1}$，则有

$$L(\sigma, \chi) \geqslant L(1, \chi) - (1-\sigma)c_1\log^2 k > \frac{c_0}{\sqrt{k}\log^2 k}$$

$$- (1-\sigma)c_1\log^2 k > 0.$$

定理证毕.

定理 2, 3 及第三章定理 5 的一个推论是：对任意的 χ, $L(1, \chi) \neq 0$，即对任意的 χ, $\xi(0, \chi)$ 不为零（参看第八章定理 2 的证明）.

在应用中，定理 3 所得到的关于 $L(s, \chi)$ 的实零点的界限常常是不够好的. 然而，使得 $L(s, \chi)$ 能够有大的实零点的那些模是分布得极为稀少的. 这一事实可以用来证明这样一些结论，这些结论使得定理 3 有可能成功地利用于许多问题中（例如，参看第十章）.

定理 4. 设 χ_1 是模 k_1 的实原特征，χ_2 是模 k_2 的实原特征，$\chi_1 \neq \chi_2$，再设 $L(s, \chi_1)$ 和 $L(s, \chi_2)$ 分别有实零点 β_1 和 β_2，则

$$\min(\beta_1, \beta_2) < 1 - \frac{c}{\log k_1 k_2}.$$

证. 考虑特征 $\chi(n) = \chi_1(n)\chi_2(n)$，它是模 k_1k_2 的特征（见第八章引理 4 推论），而且 $\chi(n) \neq \chi_0(n)$，因为 $\chi_1 \neq \chi_2$. 所以，当 $\sigma > 1$ 时，有

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)(1+\chi_1(n))(1+\chi_2(n))n^{-\sigma}$$

$$= -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{L'(\sigma, \chi_1)}{L(\sigma, \chi_1)} - \frac{L'(\sigma, \chi_2)}{L(\sigma, \chi_2)} - \frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)}. \tag{7}$$

同证明不等式 (4) 相类似，可得到

$$-\frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)} < c_1 \log k_1 k_2;$$

此外，由式 (3) 得到

$$-\frac{L'(\sigma, \chi_1)}{L(\sigma, \chi_1)} < c_1 \log k_1 - \frac{1}{\sigma - \beta_1},$$

$$-\frac{L'(\sigma, \chi_2)}{L(\sigma, \chi_2)} < c_1 \log k_2 - \frac{1}{\sigma - \beta_2}.$$

把所得到的估计代入式(7):

$$\frac{1}{\sigma - \beta_1} + \frac{1}{\sigma - \beta_2} < \frac{1}{\sigma - 1} + c_2 \log k_1 k_2.$$

取 $\sigma = 1 + \frac{1}{2c_2 \log k_1 k_2}$, 就得到

$$\min(\beta_1, \beta_2) \leqslant 1 - \frac{1}{6c_2 \log k_1 k_2}.$$

定理证毕.

推论 1[1]. 考虑模 k 的所有的特征 χ, 在对应于它们的所有的函数 $L(s, \chi)$ 中,仅可能有一个函数, 它有一个实零点 β, 满足条件:

$$\beta \geqslant 1 - \frac{c}{\log k}.$$

证. 若 χ_1 和 χ_2 是模 k 的二个不恒等的特征, 那末, 对应于它们的原特征 χ_1^* 和 χ_2^* 亦是不恒等的, 而且它们的模 k_1^* 和 k_2^* 不大于 k. 由此立即得到推论的断言:

推论 2 (A. Page). 设$3 \leqslant k \leqslant x$. 那么, 至多存在一个 k_0, $3 \leqslant k_0 \leqslant x$, 以及至多存在模 k_0 的一个实原特征 χ_1, 对此, $L(s, \chi_1)$ 有一个一级实零点 β_1[2],使得

$$\beta_1 \geqslant 1 - \frac{c}{\log x}.$$

此外,如果 $L(s, \chi)$ (χ 是模 k 的实特征)有

$$L(\beta, \chi) = 0, \qquad \beta \geqslant 1 - \frac{c}{\log x},$$

1) 参看定理 2 的译者注. ——译者注

2) 参看定理 2 的译者注. ——译者注

则 $k \equiv O \pmod{k_0}$.

证. 若 β_1 是 $L(s, \chi_1)$ 的 m 级零点，$m \geqslant 2$，则重复定理 4 的证明可得

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)(1+\chi_1(n))n^{-\sigma} = -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{L'(\sigma, \chi_1)}{L(\sigma, \chi_1)}, \ \sigma > 1;$$

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1} + c_1, \qquad -\frac{L'(\sigma, \chi_1)}{L(\sigma, \chi_1)} < c_1 \log x - \frac{m}{\sigma - \beta_1};$$

$$\frac{2}{\sigma - \beta_1} \leqslant \frac{m}{\sigma - \beta_1} < \frac{1}{\sigma - 1} + c_2 \log x; \qquad \beta_1 \leqslant 1 - \frac{1}{6c_2 \log x},$$

而这和推论的条件相矛盾. 其次，如果还有一个不恒等于 χ_1 的实原特征 χ_2，对此，$L(s, \chi_2)$ 有大的实零点

$$\beta_2 \geqslant 1 - \frac{c}{\log x},$$

那么，就和定理的结论相矛盾. 最后，设 χ 是模 k 的实特征，使得

$$L(\beta, \chi) = 0, \qquad \beta \geqslant 1 - \frac{c}{\log x}.$$

若 χ_2 是对应于 χ 的原特征，其模为 k_2，则 $k \equiv O \pmod{k_2}$，以及

$$L(\beta, \chi_2) = 0, \qquad \beta \geqslant 1 - \frac{c}{\log x}.$$

由此推出，$k_2 = k_0$，$\chi_2 \equiv \chi_1$. 推论证毕.

推论 3 (A. Page). 在推论 2 的符号和条件下，不等式

$$k_0 \geqslant \frac{c' \log^2 x}{(\log \log x)^8}$$

成立.

证. 根据定理 3 及推论的条件，有

$$1 - \frac{c}{\log x} < \beta_1 \leqslant 1 - \frac{c_1}{\sqrt{k_0} \log^4 k}.$$

由此即得所要的结论.

下面的 Siegel 定理给出了比上面所得到的更精确的实零点的界限.

定理 5. 对任意的 $\varepsilon > 0$，一定存在 $c = c(\varepsilon) > 0$，使得如果 χ 是模 k 的实特征，以及 β 是 $L(s, \chi)$ 的实零点，则有

$$\beta \leqslant 1 - \frac{c(\varepsilon)}{k^{\varepsilon}}.$$

首先证明一个辅助命题.

引理 2. 设 χ_1 和 χ_2 分别为模 k_1 和 k_2 的不同的实原特征. 再设

$$F(s) = \zeta(s) L(s, \chi_1) L(s, \chi_2) L(s, \chi_1\chi_2).$$

那么，当 $\frac{9}{10} < \sigma < 1$ 时，有估计

$$F(\sigma) > \frac{1}{2} - \frac{c\lambda}{1-\sigma} (k_1 k_2)^{8(1-\sigma)},$$

其中 $\lambda = L(1, \chi_1) L(1, \chi_2) L(1, \chi_1\chi_2)$.

证. 首先，$\chi_1\chi_2$ 不是模 k_1k_2 的主特征. 因而，除去点 $s = 1$ 外，$F(s)$ 是整个 s 平面上的正则函数，$s = 1$ 是它的一级极点，留数为

$$\lambda = L(1, \chi_1) L(1, \chi_2) L(1, \chi_1\chi_2).$$

当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时，把 $F(s)$ 展为 Dirichlet 级数：

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}.$$

因为，当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时，

$$F(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_2(p)}{p^s}\right)^{-1} \times \left(1 - \frac{\chi_1(p)\chi_2(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

而 $\chi_1(p) = 0, \pm 1$，$\chi_2(p) = 0, \pm 1$，所以，容易推得

$$b_1 = 1, \quad b_n \geqslant 0, \quad n > 1.$$

事实上，若 $\chi_1(p) = -1$，$\chi_2(p) = +1$，则

$$\prod\nolimits_1 = \prod_p{}' \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

$$= \prod_p{}' \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-2} = \left(\sum_p{}' \left(1 + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{4s}} + \cdots\right)\right)^2;$$

若 $\chi_1(p) = 0$，$\chi_2(p) = +1$，则

$$\prod{}_2 = \prod_p{}'' \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

$$= \left(\sum_p{}'' \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right)\right)^2;$$

若 $\chi_1(p) = 0$，$\chi_2(p) = -1$，则

$$\prod{}_3 = \prod_p{}''' \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

$$= \sum_p{}''' \left(1 + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{4s}} + \cdots\right);$$

若 $\chi_1(p) = \chi_2(p) = 0$，则

$$\prod{}_4 = \prod_p{}'''' \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_p{}'''' \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right).$$

其它可能的情形与这些相类似.把所有这些 $\prod_i$ 相乘就得到 $F(s)$ 的 Dirichet 级数,且显有 $b_1 = 1$，$b_n \geqslant 0$.

因而,当 $|s-2| < 1$ 时,由于

$$F^{(m)}(2) = (-1)^m \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \log^m n,$$

故有

$$F(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (2-s)^m, \quad a_0 \geqslant 1, \; a_m \geqslant 0.$$

设函数

$$g(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1},$$

显然，$g(s)$ 在整个 s 平面上是正则的. 所以等式

$$g(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m - \lambda)(2-s)^m \qquad (8)$$

在圆

$$|s-2| \leqslant \frac{3}{2} \tag{9}$$

上成立。

在圆 (9) 上来估计 $g(s)$。在边界 $|s-2|=\frac{3}{2}$ 上有

$$\zeta(s)=O(1), \qquad \frac{1}{s-1}=O(1);$$

$|L(s,\chi_1)|<ck_1$, $|L(s,\chi_2)|<ck_2$, $|L(s,\chi_1\chi_2)|<ck_1k_2$ (第八章引理 9 的推论);因此,

$$|g(s)|<c_1(k_1k_2)^2, \qquad |s-2|=\frac{3}{2}.$$

由最大模原理知,这不等式在圆 (9) 的内部亦成立. 利用关于幂级数系数的 Cauchy 定理估计 (8) 中的 $a_m-\lambda$, 可得

$$|a_m-\lambda|<c_2(k_1k_2)^2\left(\frac{2}{3}\right)^m, \quad m=0,1,2,\cdots.$$

当 $M>1$ 及 $\frac{9}{10}<\sigma<1$ 时,有

$$\sum_{m=M}^{\infty}|a_m-\lambda|(2-\sigma)^m \leqslant \sum_{m=M}^{\infty} c_2(k_1k_2)^2\left(\frac{2}{3}(2-\sigma)\right)^m$$
$$<c_3(k_1k_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M;$$

$$F(\sigma)-\frac{\lambda}{\sigma-1} \geqslant 1-\lambda\sum_{m=0}^{M-1}(2-\sigma)^m-c_3(k_1k_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M$$
$$=1-\lambda\frac{(2-\sigma)^M-1}{1-\sigma}-c_3(k_1k_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M.$$

由不等式

$$c_3(k_1k_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M<\frac{1}{2} \leqslant c_3(k_1k_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^{M-1}$$

来确定整数M，那末就有

$$F(\sigma) \geqslant \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{1-\sigma}(2-\sigma)^M.$$

因为

$$M < 8\log k_1k_2 + c_4,$$

所以

$$(2-\sigma)^M = e^{M\log(1+1-\sigma)} < e^{M(1-\sigma)} < c_5(k_1k_2)^{8(1-\sigma)}.$$

引理证毕.

定理的证明. 显然，只要证明：存在 $k_0 = k_0(\varepsilon)$，使得当 $k > k_0$ 及 $\sigma > 1 - \frac{1}{k^\varepsilon}$ 时，

$$L(\sigma, \chi) \neq 0, \tag{10}$$

其中 χ 为模 k 的实原特征. 由此就可以推出定理的断言.

假如不存在这样的模 k，对此，$L(s, \chi)$ 在区间 $1 - \frac{\varepsilon}{10} \leqslant \sigma < 1$ 上有零点. 那末，以 $k_1 = k_1(\varepsilon)$ 表示满足条件 $k^\varepsilon \geqslant \frac{10}{\varepsilon}$ 的最小的 k，则当 $k > k_1(\varepsilon)$ 时，就得到式(10).

现在假定存在这样的 k_1，对此，$L(s, \chi_1)$（χ_1是模 k_1 的实原特征）在区间 $\left[1 - \frac{\varepsilon}{10}, 1\right)$ 上有零点 $s = \sigma_1$. 设 k_2 是待定的大于 k_1 的自然数，χ_2 是模 k_2 的实原特征（因为 $k_2 > k_1$，所以 $\chi_2 \neq \chi_1$）.

由于 $L(\sigma_1, \chi_1) = 0$，故从引理 2 得到

$$0 = F(\sigma_1) > \frac{1}{2} - \frac{c\lambda}{1-\sigma}(k_1k_2)^{8(1-\sigma_1)}, \quad 1 - \frac{\varepsilon}{10} \leqslant \sigma_1 < 1,$$

这里，

$$F(s) = \zeta(s)L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)L(s, \chi_1\chi_2),$$
$$\lambda = L(1, \chi_1)L(1, \chi_2)L(1, \chi_1\chi_2).$$

这样就有

$$L(1, \chi_1)L(1, \chi_2)L(1, \chi_1\chi_2) > c_1(1-\sigma_1)(k_1k_2)^{-0.8\varepsilon}.$$

利用估计[1)]

$$L(1,\chi_1)\leqslant c\log k_1,\quad L(1,\chi_1\chi_2)\leqslant c\log k_1k_2,$$

就得到

$$L(1,\chi_2)\geqslant c_2(1-\sigma_1)(k_1k_2)^{-0.8\varepsilon}(\log k_1k_2)^{-2}.$$

取 $k_2=k_2(\varepsilon,k_1,\sigma_1)>k_1$ 足够大，使得

$$k_1^{-0.8\varepsilon}c_2(1-\sigma_1)(\log k_1k_2)^{-2}>k_2^{-0.1\varepsilon}.$$

这样，对所有的 $k>k_2$，有

$$L(1,\chi)>k^{-0.9\varepsilon},$$

其中 χ 为模 k 的实原特征．由此及 $L'(\sigma,\chi)$ 的上界估计(见定理 3 的证明)可得到：如果

$$1-\frac{1}{k^{\varepsilon}}\leqslant\sigma<1,\quad k\geqslant k_3(\varepsilon)=k_3>k_2$$

则有

$$L(\sigma,\chi)=L(1,\chi)-(1-\sigma)L'(\sigma_2,\chi)\geqslant k^{-0.9\varepsilon}$$
$$-(1-\sigma)c_3\log^2k>0.$$

因此，当 $k>k_3$ 时，就得到式(10)．定理证毕．

附注．在所证明的定理中的常数 $c=c(\varepsilon)$是非实效的，即对给定的 $\varepsilon>0$，我们不能具体计算出 $c=c(\varepsilon)$．因而，所有实质上是由应用这一定理而得到的结果也都是非实效的[2)]（例如，参看定理 6 推论2)．

§3. 算术数列中素数分布的渐近公式

应用上节的结果，可以得到 $\psi(x;k,l)$ 和 $\pi(x;k,l)$ 的渐近公式．

定理 6. 当 $x>1$ 时，等式

---

1) 原文此处有误．这里需要如下的估计：设 χ 是模 k 的非主特征，则 $L(1,\chi)\leqslant c\log k$．这是因为，$L(1,\chi)=\sum_{n\leqslant k}\frac{\chi(n)}{n}+\sum_{k<n}\frac{\chi(n)}{n}$，由 $\left|\sum_{n\leqslant k}\frac{\chi(n)}{n}\right|\leqslant c_1\log k$，及 $\left|\sum_{k<n}\frac{\chi(n)}{n}\right|\leqslant c_2$(利用Abel变换)，即得所要的估计．——译者注

2) 即这些结果中的有关常数是不能具体定出来的．——译者注

$$\psi(x;k,l)=\frac{x}{\varphi(k)}-E_1\frac{x^{\beta_1}\chi_1(l)}{\beta_1\varphi(k)}+O(xe^{-c_0\sqrt{\log x}}),$$

$$\pi(x;k,l)=\frac{\mathrm{Li}\,x}{\varphi(k)}-E_1\frac{\chi_1(l)}{\varphi(k)}\int_2^x\frac{u^{\beta_1-1}}{\log u}du+O(xe^{-c_0'\sqrt{\log x}}),$$

成立，其中，$E_1=1$，如果存在模 k 的实特征 χ_1，使得 $L(s,\chi_1)$ 有实零点 $\beta_1>1-\frac{c}{\log k}$；$E_1=0$，在相反的情形。

证. 可以假定 $k\leqslant e^{\sqrt{\log x}}$. 使得 $E_1=1$ 的特征 χ_1 仅可能有一个（定理 4 推论 1）. 根据公式 (1)

$$\psi(x;k,l)=\frac{\psi(x)}{\varphi(k)}-E_1\chi_1(l)\psi(x,\chi_1)$$

$$+\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi\neq\chi_0,\chi_1}\psi(x,\chi)\overline{\chi}(l)+O(\log^2 x).$$

设 $\chi\neq\chi_0,\chi_1$，χ^* 是对应于 χ 的模 k_1 的原特征，$k_1|k$. 那么，根据定理 1，当 $T=e^{\sqrt{\log x}}$ 时，有

$$\psi(x,\chi^*)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\chi^*(n)$$

$$=-\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\leqslant T}\frac{x^\rho}{\rho}+O(xe^{-\frac{1}{2}\sqrt{\log x}}),$$

其中 ρ 是 $L(s,\chi^*)$ 的非显然零点. 由定理 2 知，

$$\mathrm{Re}\ \rho=\beta\leqslant1-\frac{c_1}{\log kT}\leqslant1-\frac{c_2}{\sqrt{\log x}};$$

所以

$$|\psi(x,\chi^*)|\leqslant\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\leqslant T}\frac{x^\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}+c_3xe^{-\frac{1}{2}\sqrt{\log x}}\leqslant c_4xe^{-c_0\sqrt{\log x}}$$

（利用第八章定理 3 推论 1）. 这样就有

$$\psi(x,\chi)=\psi(x,\chi^*)+\theta_1\log^2 x=O(xe^{-c_0\sqrt{\log x}}).$$

现在设 $\chi=\chi_1$. 这时，

$$\psi(x, \chi_1) = -E_1 \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sum_{\substack{|\mathrm{Im}\rho| \leqslant T \\ \rho \neq \beta_1}} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(xe^{-\frac{1}{2}\sqrt{\log x}}\right),$$

而且其中

$$\mathrm{Re}\,\rho = \beta \leqslant 1 - \frac{c_1}{\log kT} \leqslant 1 - \frac{c_2}{\sqrt{\log x}}.$$

同上面所做的一样，估计对 $\rho \neq \beta_1$ 求和的和式，得到

$$\psi(x; k, l) = \frac{\psi(x)}{\varphi(k)} - E_1 \frac{\chi_1(l)}{\beta_1} \frac{x^{\beta_1}}{\varphi(k)} + O\left(xe^{-c_0\sqrt{\log x}}\right).$$

因为

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-c_0\sqrt{\log x}}\right),$$

我们就证明了定理的第一个结论.

利用 Abel 变换(第三章引理 3)，从定理的第一个结论立即推得第二个结论：

$$\pi(x; k, l) = \sum_{2 < n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)\alpha(n)}{\log n} + O\left(\sqrt{x}\log^2 x\right),$$

其中

$$\alpha(n) = \alpha(n; k, l) = \begin{cases} 1, & n \equiv l \pmod{k}; \\ 0, & n \not\equiv l \pmod{k}; \end{cases}$$

由此推出

$$\begin{aligned} \pi(x; k, l) &= \int_2^x \frac{\psi(u; k, l)}{u\log^2 u} du + \frac{\psi(x; k, l)}{\log x} + O\left(\sqrt{x}\log^2 x\right) \\ &= \frac{1}{\varphi(k)}\int_2^x \frac{du}{\log^2 u} - E_1 \frac{\chi_1(l)}{\beta_1\varphi(k)}\int_2^x \frac{u^{\beta_1-1}}{\log^2 u} du \\ &\quad + \frac{x}{\varphi(k)\log x} - E_1 \frac{\chi_1(l)x^{\beta_1}}{\beta_1\varphi(k)\log x} + O\left(xe^{-c_0'\sqrt{\log x}}\right) \\ &= \frac{\mathrm{Li}\,x}{\varphi(k)} - E_1 \frac{\chi_1(l)}{\varphi(k)}\int_2^x \frac{u^{\beta_1-1}}{\log u} du + O\left(xe^{-c_0'\sqrt{\log x}}\right), \end{aligned}$$

这就是所要证明的.

从所证明的这一定理和定理 3，5 及定理 4 的推论 2 和 3，我

们推得关于算术数列中素数分布的三个推论.

推论 1. 设 $1 \leqslant k \leqslant (\log x)^{2-\varepsilon}$，其中 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. 那么,有

$$\psi(x; k, l) = \frac{x}{\varphi(k)} + O(xe^{-c(\log x)^{\varepsilon/3}}),$$

$$\pi(x; k, l) = \frac{\mathrm{Li}\, x}{\varphi(k)} + O(xe^{-c'(\log x)^{\varepsilon/3}}).$$

证. 由定理 3 知,

$$\beta_1 \leqslant 1 - \frac{c}{\sqrt{k}\log^4 k};$$

所以

$$x^{\beta_1} \leqslant xe^{-\frac{c\log x}{\sqrt{k}\log^4 k}} = O(xe^{-c(\log x)^{\varepsilon/3}}),$$

这就是所要证明的.

推论 2. 对任意固定的 $A > 1$ 及 $1 \leqslant k \leqslant (\log x)^A$, 渐近公式

$$\psi(x; k, l) = \frac{x}{\varphi(k)} + O(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}),$$

$$\pi(x; k, l) = \frac{\mathrm{Li}\, x}{\varphi(k)} + O(xe^{-c_1\sqrt{\log x}})$$

成立,其中 $c_1 = c_1(A) > 0$.

证. 由定理 5 知,对任意的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\beta_1 \leqslant 1 - \frac{c(\varepsilon)}{k^\varepsilon}.$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2A}$，则有

$$x^{\beta_1} \leqslant xe^{-\frac{c(\varepsilon)\log x}{k^\varepsilon}} \leqslant xe^{-c(\varepsilon)(\log x)^{1-A\varepsilon}} = xe^{-c_1\sqrt{\log x}},$$

这就是所要证明的.

附注. 这里的常数 $c_1 = c_1(A)$ 是非实效的,即对给定的 A，不能计算出 $c_1 = c_1(A)$ (参看定理 5).

推论 3. 设 $x \geqslant y > 3$，那么在所有不超过 y 的模 k 中，仅可能除去一些"例外"模 k（这些 k 是某一个 k_0 的倍数，$k_0 \geqslant c\log^2 y(\log\log y)^{-8}$）外，对所有其余的 $k \leqslant y$，有渐近公式

$$\psi(x; k, l) = \frac{x}{\varphi(k)} + O(xe^{-c_2\sqrt{\log x}}) + O(xe^{-c_2\frac{\log x}{\log y}});$$

$$\pi(x; k, l) = \frac{\mathrm{Li}\,x}{\varphi(k)} + O(xe^{-c_2'\sqrt{\log x}}) + O(xe^{-c_2'\frac{\log x}{\log y}})$$

成立.

由定理 4 的推论 2 和 3 即得证.

问　　题

公差为固定的素数幂的数列中的素数分布

1. (А. Г. Постников). 设 $k = p^n$，$p \geqslant 3$ 是固定的，那么 $(s \leqslant n-1,\ n+s > sm \geqslant n)$，

$$\operatorname{ind}(1 + p^s u) \equiv u + \frac{a_2 p^s}{2} u^2 + \cdots + \frac{a_m p^{s(m-1)}}{m} u^m \pmod{(p-1)p^{n-s-1}},$$

其中

$$(a_2, p) = \cdots = (a_m, p) = 1$$

(参看第八章引理 3 的证明).

2. 设 χ 是模 $k = p^n$ 的任一非主特征，$p \geqslant 3$ 是固定的，那么，对于 $1 \leqslant r \leqslant \frac{n}{2}$，$N^r = k$，估计

$$\left|\sum_{m=1}^{N}\chi(m)\right| \leqslant c_1 N^{1-\frac{c}{r^2}}$$

成立(参看第五章定理 2 的证明).

3. 设 χ 是模 k 的任一特征，则当 $\mathrm{Re}\,s = \sigma > 0$ 时，有

$$L(s, \chi) = \sum_{n \leqslant X}\frac{\chi(n)}{n^s} + O((|t| + 1)kX^{-\sigma}).$$

4. 设 $k = p^n$，$p \geqslant 3$ 是固定的，χ 是模 k 的任一特征，则在区域

$$|\mathrm{Im}\ s| < e^{c_1(\log\log k)^2},\ \mathrm{Re}\, s = \sigma \geqslant 1 - \frac{c_2}{(\log k)^{2/3}\log\log k}$$

内，$L(s,\chi) \neq 0$（参看第六章定理 2 的证明）.

5. 设 $T \geqslant 2$，则对任意给定的模 k，所有的 $L(s,\chi)$（χ 为模 k 的特征）在区域：$\mathrm{Re}\, s \geqslant \alpha, |\mathrm{Im}\, s| \leqslant T$ 中的零点个数为

$$N(\alpha, T; k) \leqslant (kT)^{c(1-\alpha)} \ln^{c_1} kT$$

（参看第七章）.

6. 设

$$\psi_m(x; k, l) = \int_1^x \psi_{m-1}(u; k, l)du, \quad m \geqslant 1,$$

$$\psi_0(x; k, l) = \psi(x; k, l).$$

那么，当$2 \leqslant T \leqslant x$，$k \leqslant x$ 时，有

$$\psi_m(x; k, l) = \frac{x^{m+1}}{\varphi(k)(m+1)!}$$

$$-\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi \bmod k}\bar{\chi}(l) \sum_{|\mathrm{Im}\,\rho_\chi| \leqslant T} \frac{x^{\rho+m}}{\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)} + O\left(\frac{x^{m+1}}{T}\ \ln^3 x\right)$$

（参看第九章§1）.

7. 设 $R_m(x; k)$ 是 x 的正的单调减函数，

$$\psi_m(x; k, l) = \frac{x^{m+1}}{\varphi(k)(m+1)!}\{1 + O(R_m(x; k))\},$$

则

$$\psi_{m-1}(x; k, l) = \frac{x^m}{\varphi(k)m!}\{1 + O(\sqrt{R_m(x; k)})\}.$$

8. 证明：存在一个绝对常数 $\gamma > 0$，使得对 $k = p^n$，$p \geqslant 3$ 是固定的，$k \leqslant x^\gamma$，有渐近公式

$$\psi(x; k, l) = \frac{x}{\varphi(k)}\{1 + O(e^{-c(\ln\ln x)^2})\}$$

（利用问题 4，5，6，7 及第七章定理 2 的推理）.

9. 对 $k = p^n$（$p \geqslant 3$ 是固定的）的情形，试求出问题 5 中尽可能小的值 c，及问题 8 中尽可能大的 γ.

第十章 Goldbach 问题

这一章研究把一个奇数N表为三个素数之和的问题(Goldbach 问题)。这里将证明奇数N表为三个素数之和的表法个数的渐近公式,这一定理是属于 И. M. Виноградов 的。由此推出,所有充分大的奇数N一定可以表为三个素数之和。

首先给出一个比较简单的,但是,是非实效的证明(定理 3),然后,给出实效的证明(定理 4)。

§ 1. Goldbach 问题中的圆法

我们先来给出表自然数N为三个素数之和的表法个数的解析表达式。

引理 1. 设 $J(N)$ 是方程 $N=p_1+p_2+p_3$ 对于素数 p_1, p_2, p_3 的解的组数。那么,

$$J(N)=\int_0^1 S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha, \tag{1}$$

其中 $S(\alpha)=\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}$.

从关系式

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha m}d\alpha=\begin{cases}1, & m=0;\\ 0, & m\text{是整数}, \quad m\neq 0,\end{cases} \tag{2}$$

就证明了引理。

G. Hardy, J. Littlewood 和 S. Ramanujan 的圆法的实质在于:从 $J(N)$ 中取出所预料的主要部分来作为当 $N\to+\infty$ 时 $J(N)$ 的渐近公式。为此,利用既约有理分数 (Farey 分数)把式(1) 中的积分区间 $[0,1)$ 分为两两不相交的小区间;那些在对应于分母较小的分数的小区间上的积分之和就给出了所预料的主要部分。

首先，我们证明一个用有理数来逼近实数的辅助命题.

引理 2. 设 $\tau \geqslant 1$，α 是实数，则存在互素的整数 a 和 q，$1 \leqslant q \leqslant \tau$，使得

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

证. 不失一般性，可以假定 $0 \leqslant \alpha < 1$. 考虑 $\{\alpha m\}$，$m = 0, 1, \cdots, [\tau]$. 一定可以找到两个整数 $m_1 > m_2$，使得

$$(\{\alpha m_1\} - \{\alpha m_2\}) \leqslant \frac{1}{\tau}, \text{ 即 } \quad |\alpha q_1 - b_1| \leqslant \frac{1}{\tau},$$

其中 $0 < m_1 - m_2 = q_1 \leqslant \tau$，$b_1 = [\alpha m_1] - [\alpha m_2]$. 由此即推出引理的结论.

现在假定 $N \geqslant N_0$，N_0 为充分大的固定正数. 取 $\tau = N(\log N)^{-20}$；由于式(1)中的被积函数是 α 的周期函数，周期为 1，故有

$$J(N) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^3(\alpha) e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha.$$

根据引理 2，区间 $\left[-\frac{1}{\tau},\ 1 - \frac{1}{\tau}\right)$ 中的每一个 α 可表为

$$\alpha = \frac{a}{q} + z,\ 1 \leqslant q \leqslant \tau,\ (a, q) = 1,\ |z| \leqslant \frac{1}{q\tau}. \tag{3}$$

容易看出，在这个表示式中，$0 \leqslant a \leqslant q - 1$，且仅当 $q = 1$ 时，才有 $a = 0$. 用 $E_1 = E_1(A)$ 表示区间 $\left[-\frac{1}{\tau},\ 1 - \frac{1}{\tau}\right)$ 中所有这样的 α 所组成的集合：对于这些 α，在它的表示式(3)中，$q \leqslant (\log N)^A$，这里 A 是一个固定的数，$3 \leqslant A \leqslant 15$；用 E_2 表示区间 $\left[-\frac{1}{\tau},\ 1 - \frac{1}{\tau}\right)$ 中所有其余的 α 组成的集合.

引理 3. 集合 E_1 是由两两不相交的区间所组成.

证. 对于给定的 $(a, q) = 1$，$0 \leqslant a < q$，用 $E(a, q)$ 表示所有满足条件

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \tau,$$

的 α 的集合．显然，$E(a, q)$ 是属于 $\left[-\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right)$ 的区间．如果 $q \leqslant (\log N)^4$，$q_1 \leqslant (\log N)^4$，那末两个不同的区间 $E(a, q)$ 和 $E(a_1, q_1)$（即是使得 $(a-a_1)^2+(q-q_1)^2 \neq 0$ 的两个区间）是不相交的．事实上，这两个区间的中心之间的距离为

$$\left|\frac{a}{q}-\frac{a_1}{q_1}\right| \geqslant \frac{1}{qq_1},$$

而它们的长度的一半的和为

$$\frac{1}{q\tau}+\frac{1}{q_1\tau}<\frac{1}{qq_1},$$

这就是所要求证的．

用 J_1 表示在集合 E_1 上的积分，J_2 表示在集合 E_2 上的积分，即

$$J_1 = J_1(N) = \int_{E_1} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha,$$

$$J_2 = J_2(N) = \int_{E_2} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha,$$

我们就有

$$J = J_1 + J_2.$$

下面我们将经常利用不等式：$|e^{2\pi i\beta}-1| \ll |\beta|$，$\beta$ 是实数，而不作特别的说明．

定理 1. 对于 $J_1 = J_1(N)$ 有渐近公式

$$J_1 = J_1(N) = \sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right),$$

其中

$$\sigma(N) = \prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right).$$

证．从 J_1 的定义及引理 3 知，

$$J_1 = \sum_{q \leqslant (\log N)^A} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ (a,q)=1}} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{+\frac{1}{q\tau}} S^3\left(\frac{a}{q} + z\right) e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)N} \, dz.$$

我们来把 $S\left(\frac{a}{q} + z\right)$ 改写为另一种形式。根据第九章定理 6 的推论 2，有

$$\pi(n;\ q,\ l) = \frac{\mathrm{Li}\ n}{\varphi(q)} + O(ne^{-c_1\sqrt{\log n}}), \quad \sqrt{N} < n \leqslant N;$$

$$S\left(\frac{a}{q} + z\right) = \sum_{\sqrt{N} < p \leqslant N} e^{2\pi i \frac{a}{q} p} e^{2\pi i z p} + O(\sqrt{N})$$

$$= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{2\pi i \frac{a}{q} l} T(l) + O(\sqrt{N}), \tag{4}$$

其中

$$T(l) = \sum_{\substack{p \equiv l (\bmod q) \\ \sqrt{N} < p \leqslant N}} e^{2\pi i z p} = \sum_{\sqrt{N} < n \leqslant \sqrt{N}} (\pi(n;\ q,\ l) - \pi(n$$

$$- 1;\ q,\ l)) e^{2\pi i z n} = \sum_{\sqrt{N} < n \leqslant N-1} \pi(n;\ q,\ l)(e^{2\pi i z n}$$

$$- e^{2\pi i z(n+1)}) + \pi(N,\ q,\ l) e^{2\pi i z N} + O(\sqrt{N})$$

$$= \sum_{\sqrt{N} < n \leqslant N-1} \frac{\mathrm{Li}\ n}{\varphi(q)} (e^{2\pi i z n} - e^{2\pi i z(n+1)}) + \frac{\mathrm{Li}\ N}{\varphi(q)} e^{2\pi i z N}$$

$$+ O(Ne^{-c_1\sqrt{\log N}}) + O(N^2 e^{-c_1\sqrt{\log N}} |z|)$$

$$= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\sqrt{N} < n \leqslant N} (\mathrm{Li}\ n - \mathrm{Li}(n-1)) e^{2\pi i z n}$$

$$+ O(Ne^{-c_2\sqrt{\log N}}) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{3 \leqslant n \leqslant N} \left(\int_{n-1}^{n} \frac{du}{\log u}\right) e^{2\pi i z n}$$

$$+ O(Ne^{-c_2\sqrt{\log N}}).$$

因为当 $n \geqslant 3$ 时，有

$$\frac{1}{\log u} = \frac{1}{\log n} + O\left(\frac{1}{n \log^2 n}\right), \quad n - 1 \leqslant u \leqslant n,$$

所以

$$T(l)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{n=3}^{N}\frac{e^{2\pi izn}}{\log n}+O(Ne^{-c_2\sqrt{\log N}}).$$

把所得的 $T(l)$ 的表达式代入式 (4):

$$S\left(\frac{a}{q}+z\right)=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{n=3}^{N}\frac{e^{2\pi izn}}{\log n}+O(Ne^{-c_3\sqrt{\log N}})$$

$$=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}M(z)+O(Ne^{-c_3\sqrt{\log N}}),$$

这里

$$M(z)=\sum_{n=3}^{N}\frac{e^{2\pi izn}}{\log n}.$$

进而,

$$S^3\left(\frac{a}{q}+z\right)=\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}M^3(z)+O\left(\left|S\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|^2Ne^{-c_3\sqrt{\log N}}\right)$$

$$+O(N^3e^{-c_3\sqrt{\log N}}),$$

$$J_1=\sum_{q\leqslant(\log N)^A}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\Bigg(\sum_{\substack{0\leqslant a<q\\(a,q)=1}}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}\Bigg)\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{+\frac{1}{q\tau}}M^3(z)e^{-2\pi izN}dz$$

$$+O(N^2e^{-c_3\sqrt{\log N}})+O(N^2e^{-c_3\sqrt{\log N}}\log^{40}N). \qquad (5)$$

我们来讨论上式中的积分。我们有

$$\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{+\frac{1}{q\tau}}M^3(z)e^{-2\pi izN}dz=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}M^3(z)e^{-2\pi izN}dz+R, \qquad (6)$$

其中

$$|R|\ll\int_{\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{2}}|M(z)|^3dz.$$

我们来估计 $|M(z)|$, $0<|z|\leqslant\frac{1}{2}$. 由 Abel 变换及几何数列求和得出

$$|M(z)| = \left|\sum_{n=3}^{N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\log n}\right| \leqslant \left|\int_3^N \left(\sum_{3\leqslant n\leqslant u} e^{2\pi i z n}\right) \frac{du}{u\log^2 u}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\log N} \right| \sum_{3\leqslant n\leqslant N} e^{2\pi i z n} \left| \leqslant \frac{1}{|z|}\right..$$

所以

$$|R| \ll \int_{\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^3} \ll q^2\tau^2 \leqslant N^2\log^{-10}N.$$

将式（6）代入式（5），得到

$$J_1 = I(N) \sum_{q\leqslant(\log N)^A} \gamma(q) + O(N^2\log^{-10}N),$$

其中

$$I(N) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} M^3(z) e^{-2\pi i z N} dz,$$

$$\gamma(q) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N}.$$

我们来讨论 $I(N)$. 设

$$M_0(z) = \sum_{3\leqslant n\leqslant N} \frac{e^{2\pi i z n}}{\log N};$$

那么，

$$I(N) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M_0^3(z) e^{-2\pi i z N} dz + R_1,$$

其中

$$|R_1| < \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |M^3(z) - M_0^3(z)| dz$$

$$\ll \max_{|z|\leqslant\frac{1}{2}} |M(z) - M_0(z)| \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (|M(z)|^2 + |M_0(z)|^2) dz.$$

其次，

$$|M(z) - M_0(z)| \leqslant \sum_{3\leqslant n\leqslant N} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log N}\right)$$

$$= \int_3^N \frac{du}{\log u} - \frac{N}{\log N} + O(1) = O\left(\frac{N}{\log^2 N}\right);$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |M(z)|^2 dz = \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{\log^2 n} = \sum_{\sqrt{N}<n\leqslant N} \frac{1}{\log^2 n}$$

$$+ O(\sqrt{N}) = O\left(\frac{N}{\log^2 N}\right);$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |M_0(z)|^2 dz = \frac{N-2}{\log^2 N};$$

所以

$$I(N) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M_0^3(z) e^{-2\pi i z N} dz + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right)$$

$$= \frac{I_0(N)}{\log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right),$$

其中 $I_0(N)$ 是方程

$$n_1 + n_2 + n_3 = N$$

$$3 \leqslant n_1,\ n_2,\ n_3 \leqslant N - 6$$

的解数。

对固定的 n_3，$3 \leqslant n_3 \leqslant N-6$，方程

$$n_1 + n_2 = N - n_3,$$

$$3 \leqslant n_1,\ n_2 \leqslant N - 6$$

有 $N - n_3 - 5$ 个解，所以

$$I_0(N) = \sum_{n_3=3}^{N-6} (N - n_3 - 5) = \frac{N^2}{2} + O(N).$$

这样就得到

$$I(N) = \frac{N^2}{2\log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right);$$

$$J_1 = \frac{N^2}{2\log^3 N} \sum_{q\leqslant(\log N)^A} \gamma(q) + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right).$$

我们来讨论上式中的和．我们有

$$\sum_{q\leqslant(\log N)^A} \gamma(q) = \sigma(N) - \sum_{q>(\log N)^A} \gamma(q),$$

其中

$$\sigma(N)=\sum_{q=1}^{\infty}\gamma(q)$$

及

$$\left|\sum_{q>(\log N)^A}\gamma(q)\right|\leqslant\sum_{q>(\log N)^A}\frac{1}{\varphi^2(q)}$$

$$\ll\sum_{q>(\log N)^3}\frac{(\log\log q)^2}{q^2}\ll\frac{1}{\log N}.$$

因而,

$$J_1=\frac{N^2}{2\log^3 N}\sigma(N)+O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right).$$

级数 $\sigma(N)$ 具有简单的结构．设 $(q_1,q_2)=1$; $q=q_1q_2$; 若 a_1 和 a_2 分别遍历模 q_1 和 q_2 的简化剩余系,则 $a_1q_2+a_2q_1$ 就遍历模 q 的简化剩余系．所以

$$\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}=\sum_{\substack{a_1=1\\(a_1,q_1)=1}}^{q_1}e^{-2\pi i\frac{a_1}{q_1}N}\sum_{\substack{a_2=1\\(a_2,q_2)=1}}^{q_2}e^{-2\pi i\frac{a_2}{q_2}N},$$

由此推知,级数 $\sigma(N)$ 的项 $\gamma(q)$ 是可乘的．由于自然数的素因子分解式的唯一性及上面已得到的估计,我们有

$$\prod_{p\leqslant X}(1+\gamma(p)+\gamma(p^2)+\cdots)=\sum_{q\leqslant X}\gamma(q)+O\left(\frac{1}{\log X}\right).$$

取极限 $X\to+\infty$, 得到

$$\sigma(N)=\prod_{p}(1+\gamma(p)+\gamma(p^2)+\cdots).$$

从 $\gamma(q)$ 的定义可得到

$$\gamma(p)=\begin{cases}-\dfrac{1}{(p-1)^2}, & p\mid N;\\[2ex] \dfrac{1}{(p-1)^3}, & p\nmid N;\end{cases}$$

$$\gamma(p^r)=0,\ r\geqslant 2.$$

这样就有

$$\sigma(N)=\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid N}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)$$
$$=\prod_{p}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right),$$

这就是所要证明的.

附注.

1. 在所证明的定理中的大 O 常数是非实效的，因为在实质上，我们应用了第九章定理 6 的推论 2.

2. 下面（见 §3）我们将对 J_1 得到一个具有实效大 O 常数的渐近公式.

3. 对奇数 N，由显然的不等式

$$\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)>\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{6}{\pi^2},$$
$$\prod_{p\nmid N}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)>2,$$

得到

$$\sigma(N)>1.\qquad\text{（至此附注结束）}$$

为了得到 $J=J(N)$ 的渐近公式，我们必须估计 J_2，而为此就需要估计 $|S(\alpha)|$，α 属于集合 E_2.

§ 2. 素变数的线性三角和

我们来证明 И. М. Виноградов 的关于素变数的线性三角和估计的定理. 表奇数 N 为三个素数之和的表法个数的渐近公式就是这一定理和定理 1 的推论.

定理 2. 设

$$H=e^{0.5\sqrt{\log N}},\qquad \alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},$$
$$(a,q)=1,\quad |\theta|\leqslant 1,\quad 1<q\leqslant N;$$
$$S=S(\alpha)=\sum_{p\leqslant N}e^{2\pi i\alpha p}.$$

那么，

$$S \ll N(\log N)^3\Delta,$$

其中

$$\Delta = \frac{1}{H} + \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}.$$

证. 取

$$P = \prod_{p \leqslant \sqrt{N}} p;$$

利用 Möbius 函数的性质，得到

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,P)=1}}^{N} e^{2\pi i\alpha n} = \sum_{d|P} \mu(d) S_d,$$

$$S_d = \sum_{0<m\leqslant Nd^{-1}} e^{2\pi i\alpha m d}.$$

由此推得

$$S = S^{(0)} - S^{(1)} + O(\sqrt{N}),$$

这里，

$$S^{(0)} = \sum_{d_0}\sum_{m \leqslant N} e^{2\pi i\alpha m d_0}, \quad \mu(d_0) = +1,$$

$$S^{(1)} = \sum_{d_1}\sum_{m \leqslant N} e^{2\pi i\alpha m d_1}, \quad \mu(d_1) = -1.$$

和 $S^{(0)}$ 及 $S^{(1)}$ 可同样估计．我们来估计 $S^{(0)}$．把区间 $0 < m \leqslant N$ 分为 $\ll \log N$ 个这样形式的小区间：$M < m \leqslant M'$，$M' \leqslant 2M$，并考虑和

$$S(M) = \sum\sum_{\substack{md_0 \leqslant N \\ M < m \leqslant M'}} e^{2\pi i\alpha m d_0}.$$

若 $M \geqslant H$，则应用第五章引理 5 可得

$$S(M) = \sum_{d_0 \leqslant NM^{-1}} \sum_{M < m \leqslant \min\left(M', \frac{N}{d_0}\right)} e^{2\pi i\alpha m d_0} \ll \sum_{d_0 \leqslant NM^{-1}} \min\left(\frac{N}{d_0}, \frac{1}{(\alpha d_0)}\right)$$

$$\leqslant \sum_{n\leqslant NM^{-1}} \min\left(\frac{N}{n}, \frac{1}{(\alpha n)}\right) \leqslant \sum_{0<n\leqslant 0.5q} + \sum_{0.5q<n\leqslant 1.5q} + \cdots$$

$$+ \sum_{(r-0.5)q<n\leqslant(r+0.5)q}, \tag{7}$$

其中 $r \leqslant NM^{-1}q^{-1}$. 设 k 是 $an(1 \leqslant n \leqslant 0.5q)$ 对模 q 的最小非负剩余，则

$$(\alpha n) = \left(\frac{an}{q} + \frac{\theta n}{q^2}\right) = \left(\frac{k + 0.5\theta_1}{q}\right), \quad |\theta_1| \leqslant 1.$$

令

$$u = \begin{cases} k, & k \leqslant 0.5q; \\ q - k, & k > 0.5q; \end{cases}$$

就得到

$$(\alpha n) \geqslant \frac{u - 0.5}{q}, \quad (1 \leqslant n \leqslant 0.5q).$$

所以式 (7) 中的第一项

$$\leqslant q \sum_{0<u\leqslant 0.5q} \frac{1}{u - 0.5} \ll q \log q.$$

而对于式 (7) 中其余的项，我们应用第五章引理 6. 这样，就得到

$$\begin{aligned} S(M) &\ll q\log q + \sum_{l=1}^{r}\left(\frac{N}{(l-0.5)q} + q\log q\right) \\ &\ll q\log q + Nq^{-1}\log N + NM^{-1}\log q \\ &\ll N(\log N)\left(\frac{q}{N} + \frac{1}{q} + \frac{1}{H}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

现在设 $M < H$. 把和 $S(M)$ 表为

$$S(M) = \sum_{M<m\leqslant M'} \sum_{d_0\leqslant Nm^{-1}} e^{2\pi i \alpha m d_0}.$$

用字母 δ_k 来表示每一个恰好有 k 个大于 H^2 的素因子的 d_0. 对所有的 $d_0 \leqslant N$，设 k_0 是 k 的最大值，则 $2^{k_0} \leqslant N$，即 $k_0 \ll \log N$. 这样，我们有

$$S(M) = \sum_{k=0}^{k_0} S_k(M),$$

$$S_k(M) = \sum_{M<m\leqslant M'} \sum_{\delta_k\leqslant Nm^{-1}} e^{2\pi i a m \delta_k}.$$

我们来估计 $S_0(M)$. 设 κ 是 δ_0 的素因子个数，$\delta_0 > NM^{-1}H^{-1}$，则有

$$H^{2\kappa} > NH^{-2};\quad (2\kappa+2)0.5\sqrt{\log N} > \log N;$$
$$\kappa > \sqrt{\log N} - 1,\quad \tau(\delta_0) > 2^{\sqrt{\log N}-1}.$$

利用显然的不等式

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n) = \sum_{n\leqslant x}\left[\frac{x}{n}\right] \ll x\log x,$$

就得到

$$S_0(M) \ll \sum_{M<m\leqslant M'}\left(\sum_{\delta_0\leqslant NM^{-1}H^{-1}} 1 + \sum_{NM^{-1}H^{-1}<\delta_0\leqslant Nm^{-1}} \frac{\tau(\delta_0)}{2^{\sqrt{\log N}}}\right)$$
$$\ll M\left(\frac{N}{MH} + \frac{N\log N}{M\cdot 2^{\sqrt{\log N}}}\right) \ll \frac{N}{H}.$$

下面来估计 $S_k(M)$，$k>0$. 把 $S_k(M)$ 与和

$$T_k = \sum_{M<m\leqslant M'} \sum_{pt\leqslant Nm^{-1}} e^{2\pi i a m p t}$$

相比较，其中 p 遍历区间 $H^2 < p \leqslant \sqrt{N}$ 中的素数，而 t 遍历那些恰好有 $k-1$ 个大于 H^2 的素因子的 d_1. 设 $k>1$. 和 T_k 中使 $(p,t)=p$ 的项数

$$\ll \sum_{M<m\leqslant M'} \sum_{H^2<p\leqslant\sqrt{N}} \frac{NM^{-1}}{p^2} \ll \frac{N}{H},$$

而和 T_k 中其它的项同和 $S_k(M)$ 中的项是一样的，但和 $S_k(M)$ 中的每一项在 T_k 中恰好出现 k 次. 所以，

$$S_k(M) = \frac{1}{k}T_k + O\left(\frac{N}{kH}\right).$$

这一等式当 $k=1$ 时亦成立. 我们来估计 T_k. 记 $mp=u$；把区间

$$MH^2 < u \leqslant M'\sqrt{N}$$

分为 $\ll \log N$ 个小区间

$$U < u \leqslant U',\ U < U' \leqslant 2U,$$

并设

$$T_k(U) = \sum_{U<u\leqslant U'}{}' \sum_{ut\leqslant N} e^{2\pi i \alpha u t}.$$

应用第五章引理 6，得到

$$|T_k(U)|^2 \leqslant U \sum_{u=U+1}^{2U} \left| \sum_{ut\leqslant N} e^{2\pi i \alpha u t} \right|^2$$

$$= U \sum_{t_1\leqslant NU^{-1}} \sum_{t_2\leqslant NU^{-1}} \sum_{U<u\leqslant \min\left(2U, \frac{N}{t_1}, \frac{N}{t_2}\right)} e^{2\pi i \alpha u(t_1-t_2)}$$

$$\ll U \sum_{t_1\leqslant NU^{-1}} \sum_{t_2\leqslant NU^{-1}} \min\left(U, \frac{1}{(\alpha(t_1-t_2))}\right)$$

$$\ll U \frac{N}{U}\left(\frac{N}{Uq}+1\right)(U+q\log q)$$

$$\ll N^2\left(\frac{1}{q}+\frac{U}{N}+\frac{1}{U}+\frac{q}{N}\right)\log N$$

$$\ll N^2\left(\frac{1}{q}+\frac{q}{N}+\frac{1}{H^2}\right)\log N;$$

$$|T_k(U)| \ll N\sqrt{\log N}\left(\frac{1}{H}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right);$$

$$|T_k| \ll N(\log N)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{H}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right).$$

由此及 (8) 式推得

$$S(M) \ll |S_0(M)| + \sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{k}|T_k| + \frac{N}{kH}\right)$$

$$\ll N(\log N)^{\frac{3}{2}}(\log\log N)\left(\frac{1}{H}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right);$$

$$S \ll N(\log N)^3\left(\frac{1}{H}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right),$$

这正是所要证明的.

定理 3. 对于表奇数 N 为三个素数之和的表法个数 $J(N)$，有渐近公式

$$J(N)=\sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3}+O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right),$$
$$\sigma(N)=\prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right)>1. \tag{9}$$

证. 从引理 1，3 及定理 1（取 $A=15$），得到

$$\begin{aligned}J(N)&=J_1(N)+J_2(N)\\&=\sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3}+J_2(N)+O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right),\end{aligned}$$

其中

$$J_2(N)=\int_{E_2}S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha.$$

根据集合 E_2 的定义，对 $\alpha\in E_2$，有等式

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,$$
$$|\theta|\leqslant 1,\ (\log N)^{15}<q<N(\log N)^{-20};$$

由定理 2 知

$$S(\alpha)\ll N(\log N)^{-4},\quad \alpha\in E_2.$$

所以

$$J_2(N)\ll\max_{\alpha\in E_2}|S(\alpha)|\int_0^1|S(\alpha)|^2d\alpha\ll N^2(\log N)^{-5}.$$

由此即得定理的结论.

推论（Goldbach 问题）. 存在常数 N_0，使得每一个奇数 $N>N_0$ 都是三个素数之和.

由定理 1 的附注知，公式 (9) 中的大 O 常数是非实效的，所以常数 N_0 亦是非实效的. 在下一节将得到 $J(N)$ 的实效的渐近公式，因而，推论中的常数 N_0 就亦是实效的.

§3. 实 效 定 理

首先，我们要对逼近 α 的有理数的分母是小的情形，得到素变

数三角和 $S(\alpha)$ 的一个非显然估计.

引理 4. 设 $\varepsilon_0>0$ 是充分小的常数,

$$\tau\geqslant Ne^{-\varepsilon_0\sqrt{\log N}},\qquad N_1\geqslant Ne^{-\varepsilon_0\sqrt{\log N}},$$

$$\alpha=\frac{a}{q}+z;\ (a,q)=1,\ 0<q\leqslant e^{\varepsilon_0\sqrt{\log N}},\quad |z|\leqslant\frac{1}{q\tau}.$$

那么,有

$$S(\alpha)=\sum_{N-N_1<p\leqslant N}e^{2\pi i\alpha p}\ll\frac{N_1\log\log q}{\sqrt{q}\log N}.$$

证. 由第九章定理 6 知,

$$\pi(n;q,l)=\frac{\mathrm{Li}\,n}{\varphi(q)}-E_1\frac{\chi_1(l)}{\varphi(q)}\int_2^n\frac{u^{\beta_1-1}}{\log u}du$$

$$+O(ne^{-c'\sqrt{\log n}}),\quad \sqrt{N}\leqslant n\leqslant N.$$

所以,重复定理 1 的证明的第一部分,即对 $S\left(\frac{a}{q}+z\right)$ 的讨论,我们有

$$S(\alpha)=S\left(\frac{a}{q}+z\right)=\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}T(l)e^{2\pi i\frac{a}{q}l}+O(\sqrt{N}),$$

$$T(l)=\sum_{N-N_1\leqslant n\leqslant N}(t(n)-t(n-1))e^{2\pi izn}$$

$$+O(Ne^{-c_1\sqrt{\log N}})+O(N^2e^{-c_1\sqrt{\log N}}|z|),$$

其中

$$t(n)=\frac{\mathrm{Li}\,n}{\varphi(q)}-E_1\frac{\chi_1(l)}{\varphi(q)}\int_2^n\frac{u^{\beta_1-1}}{\log u}du;$$

因此,

$$S(\alpha)=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{N-N_1\leqslant n\leqslant N}\left(\int_{n-1}^n\frac{du}{\log u}\right)e^{2\pi izn}$$

$$-\frac{E_1}{\varphi(q)}\left(\sum_{l=1}^{q}\chi_1(l)e^{2\pi i\frac{a}{q}l}\right)\sum_{N-N_1\leqslant n\leqslant N}\left(\int_{n-1}^n\frac{u^{\beta_1-1}}{\log u}du\right)e^{2\pi izn}$$

$$+O(qNe^{-c_1\sqrt{\log N}})+O(qN^2e^{-c_1\sqrt{\log N}}|z|). \tag{10}$$

因为 χ_1 是模 q 的某一个实特征，所以（参看第八章 § 1），

$$\left|\sum_{l=1}^{q}\chi_1(l)e^{2\pi i\frac{a}{q}l}\right|^2=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{m=1\\(m,q)=1}}^{q}\left|\sum_{l=1}^{q}\chi_1(l)e^{2\pi i\frac{m}{q}l}\right|^2$$

$$\leqslant\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{m=1}^{q}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q}\chi_1(l)\chi_1(n)e^{2\pi i\frac{m}{q}(l-n)}\leqslant q.$$

由此及式 (10) 得到

$$S(\alpha)\ll\frac{\mathrm{Li}\ N-\mathrm{Li}(N-N_1)}{\varphi(q)}+\frac{\sqrt{q}\,(\mathrm{Li}\ N-\mathrm{Li}(N-N_1))}{\varphi(q)}$$

$$+qNe^{-c_1\sqrt{\log N}}+qN^2e^{-c_1\sqrt{\log N}}|z|\ll\frac{N_1}{\log N}\frac{\log\log q}{\sqrt{q}},$$

这即是要证明的.

定理 4. 对于表奇数 N 为三个素数之和的表法个数 $J(N)$，有渐近公式

$$J(N)=\sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3}+O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3.4}}\right),$$

其中

$$\sigma(N)=\prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right),$$

及大 O 常数是实效的.

证. 取 $\tau=N(\log N)^{-20}$；由引理 2 知，对于 $\alpha\in\left[-\frac{1}{\tau},\ 1-\frac{1}{\tau}\right)$ 有

$$\alpha=\frac{a}{q}+z,\ 1\leqslant q\leqslant\tau,\ (a,q)=1,\ |z|\leqslant\frac{1}{q\tau}. \tag{11}$$

用 E_1 表示这样的 α 的集合，对于它有 $q\leqslant(\log N)^3$，而用 E_2 表示

其余的 α 的集合．由引理 3 知，集合 E_1 由两两不相交的区间组成．同以前一样，设

$$J = J_1 + J_2,$$

其中

$$J_1 = \int_{E_1} S^3(\alpha) e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha, \qquad J_2 = \int_{E_2} S^3(\alpha) e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha.$$

估计 J_2．若在表示式 (11) 中，

$$q \geqslant (\log N)^{20},$$

则由定理 2 得到

$$S(\alpha) \ll N(\log N)^{-7};$$

若 $(\log N)^3 < q \leqslant (\log N)^{20}$，则由引理 4 得到

$$S(\alpha) \ll N(\log N)^{-2.5}(\log\log N).$$

所以

$$J_2 \ll \max_{\alpha \in E_2} |S(\alpha)| \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \ll N^2(\log N)^{-3.5}(\log\log N).$$

现在来计算 J_1．首先，考虑所有不超过 y 的 q 的集合，

$$y = e^{\frac{\log N}{(\log\log N)^2}};$$

根据第九章定理 6 的推论 3，当 $\sqrt{N} \leqslant x \leqslant N$ 时，可能除去一些"例外"模 q（这些 q 一定是某一个 q_0 的倍数，$q_0 \geqslant c\log^2 y(\log\log y)^{-8} \geqslant c\log^2 N(\log\log N)^{-12}$）外，对所有其余的 q 有渐近公式：

$$\pi(x;\, q,\, l) = \frac{\mathrm{Li}\, x}{\varphi(q)} + O(xe^{-c_1(\log\log x)^2}).$$

把积分 J_1 表为两个积分的和：

$$J_1 = J_1' + J_1'',$$

这里，J_1' 是在这样的 α 上的积分：在这些 α 的表示式 (11) 中，$q \leqslant (\log N)^3$ 且 q 不是"例外"模；而 J_1'' 是在这样的 α 上的积分：在这些 α 的表示式 (11) 中，$q \leqslant (\log N)^3$ 且 q 属于"例外"模的集合．对于非例外模，重复定理 1 的证明，可得到

$$J_1' = \frac{N^2}{2(\log N)^3} \sum_{q \leqslant (\log N)^3}{}' \gamma(q) + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right), \tag{12}$$

其中求和号是表示对非例外模求和，

$$\gamma(q) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N}.$$

估计 J_1''. 取 $D = (\log N)^{30}$, $A = ND^{-1}$. 那么，有

$$S\left(\frac{a}{q} + z\right) = \sum_{s=1}^{D} \sum_{(s-1)A < p \leqslant sA} e^{2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)p}$$

$$= \sum_{s=1}^{D} \sum_{(s-1)A<p\leqslant sA} e^{2\pi i \frac{a}{q} p} \cdot e^{2\pi i z s A} + O(|z| AN)$$

$$= \sum_{s=1}^{D} e^{2\pi i z s A} \sum_{(s-1)A<p\leqslant sA} e^{2\pi i \frac{a}{q} p} + O(Nq^{-1}(\log N)^{-10});$$

由此得到

$$S^3\left(\frac{a}{q} + z\right) e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)N} = \sum_{s_1,s_2,s_3=1}^{D} e^{2\pi i z A(s_1+s_2+s_3-D)} W(s_1, s_2, s_3)$$

$$+ O\left(\left|S\left(\frac{a}{q} + z\right)\right|^2 Nq^{-1}(\log N)^{-10}\right) + O(N^3 q^{-3}(\log N)^{-30}),$$

其中

$$W(s_1, s_2, s_3) = \sum_{(s_1-1)A<p_1\leqslant s_1A} \sum_{(s_2-1)A<p_2\leqslant s_2A} \sum_{(s_3-1)A<p_3\leqslant s_3A} \times e^{2\pi i \frac{a}{q}(p_1+p_2+p_3-N)}.$$

这样，对 J_1'' 就得到估计

$$J_1'' \ll \sum_{q\leqslant(\log N)^3}{}'' \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \left(\frac{1}{q\tau} \sum_{\substack{s_1,s_2,s_3=1\\ s_1+s_2+s_3=D}}^{D} |W(s_1, s_2, s_3)|\right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{s_1,s_2,s_3=1\\ s_1+s_2+s_3\neq D}}^{D} \frac{1}{|s_1+s_2+s_3-D|A} |W(s_1, s_2, s_3)|\right)$$

$$+ N^2(\log N)^{-10}.$$

应用引理 4 估计 $|W(s_1, s_2, s_3)|$，得到

$$|W(s_1, s_2, s_3)| \ll \left(\frac{A\log\log N}{\sqrt{q}\log N}\right)^3.$$

其次，方程

$$s_1 + s_2 + s_3 - D = \lambda, \quad \lambda \ll D$$

的解数不超过 D^2.

所以

$$J_1'' \ll \sum_{q\leqslant(\log N)^3}'' \left(\frac{1}{\tau} D^2 \frac{A^3(\log\log N)^3}{q^{3/2}(\log N)^3} + \frac{q}{A} D^2 \frac{A^3(\log\log N)^4}{q^{3/2}(\log N)^3}\right)$$

$$+ N^2(\log N)^{-10} \ll N^2(\log N)^{-10} + \frac{N^2(\log\log N)^4}{(\log N)^3}$$

$$\times \sum_{q\leqslant(\log N)^3}'' \frac{1}{\sqrt{q}},$$

而且，这里的求和号是表示对“例外”模求和．所以

$$\sum_{q\leqslant(\log N)^3}'' \frac{1}{\sqrt{q}} \ll \frac{1}{\sqrt{q_0}} \sum_{m\leqslant(\log N)(\log\log N)^{12}} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\ll \frac{1}{\sqrt{q_0}}\sqrt{\log N}(\log\log N)^6 \ll \frac{(\log\log N)^{12}}{\sqrt{\log N}}.$$

最后得到

$$J_1'' \ll \frac{N^2(\log\log N)^{16}}{(\log N)^{3.5}}. \tag{13}$$

从 $\gamma(q)$ 及“例外”模 q 的定义可推得

$$\sum_{q\leqslant(\log N)^3}'' \gamma(q) \ll \sum_{q\leqslant(\log N)^3}'' \frac{1}{\varphi^2(q)} \ll \sum_{q<(\log N)^3}'' \frac{(\log\log q)^2}{q^2}$$

$$\ll q_0^{-2}(\log\log\log N)^2 \ll (\log N)^{-4}(\log\log N)^{25}.$$

从这一估计及式 (13) 得到

$$J_1'' = \frac{N^2}{2(\log N)^3} \sum_{q\leqslant(\log N)^3}'' \gamma(q) + O\left(\frac{N^2(\log\log N)^{16}}{(\log N)^{3.5}}\right).$$

把所得的 J_1'' 的这一表达式和式 (12) 合在一起，就得到了 J_1 的渐

近公式，因而也就得到了 J 的渐近公式:

$$J_1 = \frac{N^2}{2(\log N)^3} \sum_{q \leqslant (\log N)^4} \gamma(q) + O\left(\frac{N^2(\log\log N)^{16}}{(\log N)^{3.5}}\right)$$

$$= \sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3.4}}\right);$$

$$J = \sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3.4}}\right),$$

这就是所要求证的.

问　　题

1. (Н. Г. Чудаков). 设 $K(X)$ 为不超过 X 且不能表为两个素数之和的偶数的个数. 证明: 对任意固定的 $A > 0$, 有

$$K(X) = O\left(\frac{X}{\ln^A X}\right).$$

2. 对固定的自然数 n, m, k, 求方程

$$np_1 + mp_2 + kp_3 = N$$

的解数的渐近公式, p_1, p_2, p_3 是素数.

3. (А. И. Виноградов). 设 $ab_1 - a_1b \neq 0$, a, a_1, b, b_1, c, c_1 是整数;那么,平面上形如 $(ax + by + c,\ a_1x + b_1y + c_1)$[1] 的整点集合中有无穷多对素数 (p_1, p_2) (关于数列 $ax + b$ 中的素数定理的推广). (应用圆法).

4. (И. М. Виноградов). 设 p 是素数, $(k, p) = 1$, q 是素数. 那么,存在绝对常数 $\gamma > 0$, 使得

$$\left|\sum_{q < p^\gamma}\left(\frac{q+k}{p}\right)\right| \leqslant cp^{\gamma-\delta},\quad \delta = \delta(\gamma) > 0.$$

由此,对于尽可能小的 γ, 推出在"平移素数叙列" $q + k$, $q < p^\gamma$, 中的平方剩余和非剩余的分布定理(参看第十章§2 及第八章问题 4, 5).

---

1) 这里显然应该假定 $(a, b, c) = (a_1, b_1, c_1) = 1$. ——译者注

5. 设 p 是素数，试讨论在形如 $\mu(n)n+k$, $(k,p)=1$ 的叙列中，模 p 的平方剩余和非剩余的分布（参看问题 4）。

平均密度定理

（А. И. Виноградов—E. Bombieri—H. L. Montgomery）

6. 设 χ 是模 k 的原特征，$k\leqslant Q$，则对任意的 a_n 有

$$\sum_{k\leqslant Q}\sum_{\chi \bmod k}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2\leqslant c(Q^2+N)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2$$

（参看第八章§1并利用该章问题 13）.

7. 设 $\operatorname{Re}s_\chi=\sigma_\chi\geqslant 0$, $\operatorname{Im}s_\chi=t_\chi$, $A\leqslant t_\chi\leqslant A+1$；则在问题 6 的条件下，有

$$\sum_{k\leqslant Q}\sum_{\chi \bmod k}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)n^{-s_\chi}\right|^2\leqslant c(Q^2+N)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2.$$

8. 设 $N(\alpha,T,\chi)$是 $L(s,\chi)$在区域：$\operatorname{Re}s\geqslant\alpha$, $|\operatorname{Im}s|\leqslant T$ 中的零点个数，那么，对于 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$, $T\geqslant 2$, $Q\geqslant 1$, 在问题 6 的条件下有

$$\sum_{k\leqslant Q}\sum_{\chi \bmod k}N(\alpha,T,\chi)\leqslant cT(Q^2+QT)^{\frac{4(1-\alpha)}{3-2\alpha}}\log^{10}(Q+T).$$

为此，证明

a) $N(\alpha,T+1,\chi)-N(\alpha,T,\chi)\leqslant c_1\log TQ$
（见第八章定理 3 的推论 1）；

b). 当 $\operatorname{Re}s=\sigma>0$, $Z\geqslant k(|t|+1)$ 时，

$$L(s,\chi)=\sum_{n\leqslant Z}\frac{\chi(n)}{n^s}+O(kZ^{-\sigma})$$

（应用第三章 § 5 的推理，亦可参看第八章问题 15）；

c). 设$M_X(s,\chi)=\sum_{n\leqslant X}\mu(n)\chi(n)n^{-s}$，用它乘以 $L(s,\chi)$，由此来证明：当 $s=\rho$, $L(\rho,\chi)=0$ 时，以下的不等式必有一个成立（参看第七章 § 1）：

$$1 \leqslant c_2 \left| \sum_{X < n \leqslant X^2} a(n)\chi(n)n^{-\rho} \right|^4,$$

$$1 \leqslant c_2 \left| \sum_{X^2 < n \leqslant XY} a(n)\chi(n)n^{-\rho} \right|^2,$$

$$1 \leqslant c_2 \left| \sum_{n \leqslant X} \mu(n)\chi(n)n^{-\rho} \right|^{4/3} \left| \sum_{Y < n \leqslant Z} \chi(n)n^{-\rho} \right|^{4/3},$$

$$1 \leqslant c_2 k^2 Z^{-2\sigma} \left| \sum_{n \leqslant X} \mu(n)\chi(n)n^{-\rho} \right|^2,$$

这里

$$L(s, \chi)M_X(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\chi(n)n^{-s}, \quad s > 1;$$

d). 在 (c) 中令 $X = B^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3-2\alpha}}$, $Y = B^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3-2\alpha}}$,

$$Z = \begin{cases} B, & \frac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{3}{4}; \\ Y, & \frac{3}{4} \leqslant \alpha \leqslant 1, \end{cases} \quad B = \max(Q^2, QT),$$

把 (c) 中的不等式(参看第七章 § 1) 先对所有的 $\rho = \rho_\chi$($\mathrm{Re}\,\rho_\chi \geqslant \alpha$, $|\mathrm{Im}\rho_\chi| \leqslant T$) 相加，再对所有的 χ (χ 是模 k 的原特征)相加，最后，对所有的 k, $k \leqslant Q$, 相加，并应用问题 7 (对第三个不等式要先应用 Hölder 不等式

$$\sum |a|^{4/3}|b|^{4/3} \leqslant (\sum |a|^2)^{2/3}(\sum |b|^4)^{1/3}).$$

9. 对任意的 $A > 0$ 可找到 $B = B(A) > 0$，使得

a). $$\sum_{k \leqslant \sqrt{x}(\ln x)^{-B}} \max_{(l,k)=1} \left| \psi(x; k, l) - \frac{x}{\varphi(k)} \right| \leqslant c \frac{x}{(\ln x)^A},$$

其中 $c > 0$ 实际上是不能计算出来的(参看第九章 §1，第九章定理 1；当 $k \leqslant (\ln x)^N$ 时，应用第九章定理 6 的推论 2，而当 $k > (\ln x)^N$ 时，应用问题 8)；

b). 证明存在常数 $B > 0$，使得

$$\sum_{k \leqslant \sqrt{x}(\ln x)^{-B}} \max_{(l,k)=1} \left| \psi(x; k, l) - \frac{x}{\varphi(k)} \right| \leqslant c_2 \frac{x}{(\ln x)^{3-\varepsilon}},$$

其中 $c_1>0$ 是可以实际计算的常数（应用第九章定理 4 的推论 3）。

Titchmarsh 除数问题和素数问题（Ю. В. Линник）

10. 设 P 是正整数；z 取整数值 $z_1, z_2, \cdots, z_n$；函数 $f(z)\geqslant 0$；再设 S' 表示函数 $f(z)$ 在与 P 互素的那些 z 上的值的和，S_d 表示函数 $f(z)$ 在为 d 的倍数的那些 z 上的值的和。那么，对于偶数 $m>0$，有

$$S'\leqslant \sum_{\substack{d\mid P\\ \Omega(d)\leqslant m}} \mu(d) S_d.$$

11. a) 设 $k\leqslant x^{\frac{9}{10}}$，$\ln b=\dfrac{\ln x}{1000\ln\ln x}$；$0\leqslant l<k$，$(l,k)=1$。那么，对于数列 $kn+l$，$n=0,1,2,\cdots$，中不能被 $\leqslant b$ 的素数整除且不超过 x 的数的个数 T，有估计

$$T\leqslant c\frac{x}{\varphi(k)}\frac{\ln\ln x}{\ln x}$$

$\Bigg($在问题 10 中取 $P=\prod\limits_{\substack{p\leqslant b\\ (p,k)=1}} p$，$m=2[c_1\ln\ln x]$，应用第四章问题 6 来估计和 $\sum\limits_{d\mid P}\dfrac{\mu(d)}{d}$，$\sum\limits_{m<\Omega(d)\leqslant d}\dfrac{1}{d}\Bigg)$。

b)。 设 $0<\alpha<1$，$k\leqslant x^{\alpha}$，$x\geqslant x_0>0$，则

$$\pi(x;k,l)\leqslant c\frac{x}{\varphi(k)}\frac{\ln\ln x}{\ln x}.$$

12. 证明：

$$\sigma(x)=\sum_{p\leqslant x}\tau(p-1)=c_0x+O\left(\frac{x(\ln\ln x)^3}{\ln x}\right)$$

$$\left(\sigma(x)=2\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\pi(x;k,l)+O\left(\sum_{\substack{p=n\quad m\leqslant x\\ n\leqslant\sqrt{x},\ m\leqslant\sqrt{x}}}1\right)\right);$$

把对 k 求和的和式分为两部分：当 $k\leqslant\sqrt{x}(\ln x)^{-B}$ 时，利用问题 9；当 $\sqrt{x}\geqslant k>\sqrt{x}(\ln x)^{-B}$ 时，利用问题 11（同样可参看第四章问题 5）。

第十一章　Waring 问题

本章研究把自然数N表为一定个数的自然数的相同的一定次方之和的问题，即关于方程

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n = N, \tag{1}$$

对自然数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的可解性问题，其中 $n \geqslant 3$，$k = k(n)$ (Waring 问题)。 Waring 问题是 Lagrange 定理——每个自然数是四个非负整数的平方和——的推广.

这里将证明 И. М. Виноградов 关于方程(1)的解数$J_{k,n}(N)$的两个结果：一个结果是当项数k的阶为$n^2\log n$时，得到了$N\to+\infty$时$J_{k,n}(N)$的渐近公式. 特别地，由此推出存在$k=k(n)$，使得对任意的$N\geqslant 1$，方程(1)在非负整数中可解；另一个结果是估计使得方程(1)对所有充分大的N可解的最小的值k(作为n的函数)的上界，即我们将证明，当项数k的阶为$n\log n$时，存在常数$N_0=N_0(n)$，使所有的$N\geqslant N_0$可表为形式(1)；还将证明，当$k<n$时，存在N的一个无穷叙列，其中每一个数都不能表为形式(1).

§1. Waring 问题中的圆法

设$J_{k,n}(N)$为方程

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n = N$$

对于自然数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的解数. 下面总假定$n\geqslant 3$，且自然数N大于某个仅依赖于n的固定数$N_0=N_0(n)>0$.

取　$P=N^{\frac{1}{n}}$，$\tau=2nP^{n-1}$.　　根据第十章的公式(2)，

$$J=J_{k,n}(N)=\int_0^1 S^k(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^k(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha,$$

其中

$$S(\alpha)=\sum_{1\leqslant x\leqslant P}e^{2\pi i\alpha x^n}.$$

如同第十章一样，把积分 J 表为两个分别在集合 E_1 与 E_2 上的积分 J_1 与 J_2 之和（G. Hardy, J. Littlewood 和 S. Ramanujan 的圆法）.

由第十章引理 2 知，每一个 $\alpha\in\left[-\frac{1}{\tau},\ 1-\frac{1}{\tau}\right)$ 可表为

$$\alpha=\frac{a}{q}+z,\ 1\leqslant q\leqslant\tau,\ (a,q)=1,\ |z|\leqslant\frac{1}{q\tau}. \qquad (2)$$

容易看出，在这个表示式中，$0\leqslant a\leqslant q-1$，且仅当 $q=1$ 时，$a=0$. 用 E_1 表示由这样的 $\alpha\in\left[-\frac{1}{\tau},\ 1-\frac{1}{\tau}\right)$ 所组成的集合：对于这些 α，在其表示式 (2) 中

$$q\leqslant P^{0.25};$$

用 E_2 表示由所有其余的 $\alpha\in\left[-\frac{1}{\tau},\ 1-\frac{1}{\tau}\right)$ 所组成的集合. 集合 E_1 由两两不相交的区间 $E(a,q)$:

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q\tau};\ 1\leqslant q\leqslant P^{0.25},\ 0\leqslant a<q,\ (a,q)=1,$$

所组成. 这一事实的证明类似于第十章引理 3 的证明. 用 J_1 表示在集合 E_1 上的积分，J_2 表示在集合 E_2 上的积分，即

$$J_1=\int_{E_1}S^k(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha,\quad J_2=\int_{E_2}S^k(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha,$$

我们有

$$J=J_1+J_2.$$

首先，我们来估计形为

$$S(a,q)=\sum_{x=1}^{q}e^{2\pi i\frac{a}{q}x^n},\quad (a,q)=1$$

的三角和的模的上界.

引理 1. 对于$S(a,q)$有不等式

$$|S(a,q)|\leqslant n^{n^6}q^{1-\frac{1}{n}}.$$

证. 若 $q=q_1q_2$，$(q_1,q_2)=1$，则

$$S(a,q)=S(a_1,q_1)S(a_2,q_2).$$

事实上，当 x_1 和 x_2 分别遍历模 q_1 和 q_2 的完全剩余系时，$x_1q_2+x_2q_1$ 遍历模 q 的完全剩余系；此外还有

$$(x_1q_2+x_2q_1)^n\equiv x_1^nq_2^n+x_2^nq_1^n \pmod{q}.$$

所以，

$$\begin{aligned}S(a,q)&=\sum_{x_1=1}^{q_1}\sum_{x_2=1}^{q_2}e^{2\pi i\frac{a}{q}(x_1q_2+x_2q_1)^n}\\&=\sum_{x_1=1}^{q_1}e^{2\pi i\frac{aq_2^{n-1}}{q_1}x_1^n}\sum_{x_2=1}^{q_2}e^{2\pi i\frac{aq_1^{n-1}}{q_2}x_2^n}\\&=S(a_1,q_1)S(a_2,q_2),\end{aligned}$$

其中 $a_1\equiv aq_2^{n-1}\pmod{q_1}$，$(a_1,q_1)=1$，$a_2\equiv aq_1^{n-1}\pmod{q_2}$，$(a_2,q_2)=1$. 由此推出

$$S(a,q)=S(a_1,p_1^{\alpha_1})\cdots S(a_r,p_r^{\alpha_r}),\tag{3}$$

这里 $q=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 q 的标准展开式. 我们来估计 $|S(a,p^\alpha)|$，$\alpha\geqslant 1$，p 是素数. 设 $\alpha=1$. 这时

$$S(a,p)=\sum_{x=1}^{p}e^{2\pi i\frac{a}{p}x^n}=\frac{1}{p-1}\sum_{y=1}^{p-1}\sum_{x=1}^{p}e^{2\pi i\frac{ax^ny^n}{p}}.$$

由于同余方程 $y^n\equiv\lambda\pmod{p}$，$1\leqslant y\leqslant p-1$，的解数不超过 n，所以

$$\begin{aligned}|S(a,p)|^2&\leqslant\frac{1}{p-1}\sum_{y=1}^{p-1}\left|\sum_{x=1}^{p}e^{2\pi i\frac{ax^n}{p}y^n}\right|^2\\&\leqslant\frac{n}{p-1}\sum_{\lambda=1}^{p-1}\left|\sum_{x=1}^{p}e^{2\pi i\frac{ax^n}{p}\lambda}\right|^2=\frac{n}{p-1}(pK-p^2),\end{aligned}$$

这里 K 表示同余方程

$$x_1^n\equiv x_2^n\pmod{p},\quad 1\leqslant x_1,x_2\leqslant p,$$

的解数. 其次有

$$K \leqslant 1 + n(p-1),$$

因而，

$$|S(a,p)|^2 \leqslant \frac{n}{p-1}(p - p^2 + np(p-1)) < n^2 p,$$

$$|S(a,p)| < n\sqrt{p}.$$

现在设$1 < \alpha \leqslant n$，$(n, p) = 1$。 这时

$$S(a, p^\alpha) = \sum_{y=0}^{p-1} \sum_{x=1}^{p^{\alpha-1}} e^{2\pi i \frac{a}{p^\alpha}(yp^{\alpha-1}+x)^n}$$

$$= \sum_{x=1}^{p^{\alpha-1}} e^{2\pi i \frac{a}{p^\alpha} x^n} \sum_{y=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{anx^{n-1}}{p} y}$$

$$= p \sum_{\substack{x=1 \\ x\equiv 0 \pmod p}}^{p^{\alpha-1}} e^{2\pi i \frac{a}{p^\alpha} x^n} = p^{\alpha-1}.$$

如果$\alpha > n$，用τ表示p在n的标准展开式中的指数，则有

$$S(a, p^\alpha) = \sum_{y=0}^{p^{\tau+1}-1} \sum_{x=1}^{p^{\alpha-\tau-1}} e^{2\pi i \frac{a}{p^\alpha}(p^{\alpha-\tau-1}y+x)^n}$$

$$= \sum_{x=1}^{p^{\alpha-\tau-1}} e^{2\pi i \frac{a}{p^\alpha} x^n} \sum_{y=0}^{p^{\tau+1}-1} e^{2\pi i \frac{anx^{n-1}}{p^{\tau+1}} y}$$

$$= p^{\tau+1} \sum_{\substack{x=1 \\ x\equiv 0 \pmod p}}^{p^{\alpha-\tau-1}} e^{2\pi i \frac{a}{p^\alpha} x^n} = p^{\tau+1} \sum_{x=1}^{p^{\alpha-\tau-2}} e^{2\pi i \frac{a}{p^{\alpha-n}} x^n}$$

$$= p^{n-1} S(a, p^{\alpha-n}).$$

为了作进一步的讨论，引进函数$T(a, q)$，

$$T(a, q) = q^{-1+\frac{1}{n}} S(a, q).$$

由所得的$S(a, p^\alpha)$的估计可得到：

当$1 \leqslant \alpha \leqslant n$，$(p, n) = p$时，

$$|T(a, p^\alpha)| = p^{-\alpha\left(1-\frac{1}{n}\right)} |S(a, p^\alpha)| \leqslant p^{\frac{\alpha}{n}} \leqslant p \leqslant n;$$

当 $\alpha=1$，$(p, n)=1$ 时，

$$|T(a, p^{\alpha})| < p^{-1+\frac{1}{n}} n\sqrt{p} \leqslant np^{-\frac{1}{2}};$$

当 $1<\alpha\leqslant n$，$(p, n)=1$ 时，

$$|T(a, p^{\alpha})| = p^{-\alpha\left(1-\frac{1}{n}\right)} p^{\alpha-1} = p^{\frac{\alpha}{n}-1} \leqslant 1$$

这样一来，当 $1\leqslant \alpha\leqslant n$ 时，总有

$$|T(a, p^{\alpha})| \leqslant \begin{cases} n, & p\leqslant n^{6}; \\ 1, & p>n^{6}. \end{cases}$$

这一不等式当 $\alpha>n$ 时亦成立，因为当 $\alpha>n$ 时，有

$$T(a, p^{\alpha}) = p^{-\alpha\left(1-\frac{1}{n}\right)} p^{n-1} S(a, p^{\alpha-n}) = T(a, p^{\alpha-n}).$$

由此及式 (3) 就得到

$$|S(a, q)| q^{-1+\frac{1}{n}} = |T(a_1, p_1^{\alpha_1})| \cdots |T(a_r, p_r^{\alpha_r})| \leqslant n^{n^6},$$

这就是所要求证的。

定理 1. 当 $k\geqslant 2n+1$ 时，对 J_1 有公式

$$J_1 = \sigma(N)\gamma N^{\frac{k}{n}-1} + O(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{4n^2}}),$$

其中

$$\sigma(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ (a,q)=1}} \left(\frac{S(a, q)}{q}\right)^k e^{-2\pi i \frac{a}{q}N},$$

$$\gamma = \gamma(n, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i z u^n} du\right)^k e^{-2\pi i z} dz.$$

证. 根据 J_1 的定义及集合 E_1 的性质，有

$$J_1 = \sum_{q\leqslant P^{0.25}} \sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ (a,q)=1}} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{+\frac{1}{q\tau}} S^k\left(\frac{a}{q}+z\right) e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)N} dz.$$

我们来讨论 $S\left(\frac{a}{q}+z\right)$. 把 x，$1\leqslant x\leqslant P$，表为 $x=qt+s$，其中 $s=1, 2, \cdots, q$，而对固定的 s，变量 t 在 $\frac{1-s}{q}\leqslant t\leqslant \frac{P-s}{q}$ 范围内取值，这样就有

$$S\left(\frac{a}{q}+z\right)=\sum_{1\leqslant x\leqslant P}e^{2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)x^n}$$

$$=\sum_{s=1}^{q}e^{2\pi i\frac{a}{q}s^n}\sum_{\frac{1-s}{q}\leqslant t\leqslant\frac{P-s}{q}}e^{2\pi iz(qt+s)^n}.$$

因为,

$$\left|\frac{d}{dt}z(qt+s)^n\right|=|nzq(qt+s)^{n-1}|\leqslant\frac{1}{2},$$

所以,由第三章引理 4 得到,

$$\sum_{\frac{1-s}{q}\leqslant t\leqslant\frac{P-s}{q}}e^{2\pi iz(qt+s)^n}=\int_{\frac{1-s}{q}}^{\frac{P-s}{q}}e^{2\pi iz(qt+s)}dt+O(1)$$

$$=\frac{1}{q}\int_0^P e^{2\pi izx^n}dx+O(1)$$

$$=\frac{1}{q}\gamma_0(z)+O(1),$$

其中

$$\gamma_0(z)=\int_0^P e^{2\pi izx^n}dx.$$

这样一来,

$$S\left(\frac{a}{q}+z\right)=\frac{S(q,a)}{q}\gamma_0(z)+O(q).\tag{4}$$

估计 $|\gamma_0(z)|$, $z\neq 0$, 的上界. 不失一般性,可假定 $z>0$. 作积分变量替换 $zx^n=u$, 以及当 $z>P^{-n}$ 时进行分部积分,得到

$$\gamma_0(z)=\frac{1}{n}z^{-\frac{1}{n}}\int_0^{zP^n}u^{-1+\frac{1}{n}}e^{2\pi iu}du$$

$$=\frac{1}{n}z^{-\frac{1}{n}}\int_0^1 u^{-1+\frac{1}{n}}e^{2\pi iu}du+\frac{1}{2\pi in}z^{-\frac{1}{n}}\int_1^{zP^n}u^{-1+\frac{1}{n}}de^{2\pi iu}$$

$$=\frac{1}{n}z^{-\frac{1}{n}}\int_0^1 u^{-1+\frac{1}{n}}e^{2\pi iu}du+\frac{z^{-\frac{1}{n}}}{2\pi in}u^{-1+\frac{1}{n}}e^{2\pi iu}\Big|_1^{zP^n}$$

$$+\frac{1}{2\pi in}z^{-\frac{1}{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)\int_1^{zP^n}u^{-2+\frac{1}{n}}e^{2\pi iu}du;$$

所以，

$$|\gamma_0(z)|\ll z^{-\frac{1}{n}}.$$

这样，对任意的 z，

$$|\gamma_0(z)|\ll Z,\quad 这里\ Z=\min(P,\ |z|^{-\frac{1}{n}}).$$

由式（4）及引理1，得到

$$S^k\left(\frac{a}{q}+z\right)e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)N}=\gamma_0^k(z)e^{-2\pi izN}\left(\frac{S(a,q)}{q}\right)^k e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}$$

$$+O(qZ^{k-1}q^{-\frac{k-1}{n}})+O(q^k);$$

$$J_1=\sum_{q\leqslant P^{0.25}}\sum_{\substack{0\leqslant a<q\\(a,q)=1}}\left(\frac{S(a,q)}{q}\right)^k e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}\gamma_1(q)+R \tag{5}$$

其中

$$\gamma_1(q)=\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{+\frac{1}{q\tau}}\gamma_0^k(z)e^{-2\pi izN}dz,$$

$$R\ll\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{+\frac{1}{q\tau}}Z^{k-1}dz+P^{\frac{k+1}{4}}\tau^{-1}$$

$$\ll\int_0^{P^{-n}}P^{k-1}dz+\int_{P^{-n}}^{\frac{1}{q\tau}}z^{-\frac{k-1}{n}}+P^{\frac{k+1}{4}-n+1}\ll P^{k-n-1}.$$

现来讨论 $\gamma_1(q)$。在 $\gamma_0(z)$ 中作积分变量替换 $x=Pu$，得到

$$\gamma_1(q)=P^{k-n}\int_{-\frac{P^n}{q\tau}}^{+\frac{P^n}{q\tau}}\left(\int_0^1 e^{2\pi izu^n}du\right)^k e^{-2\pi iz}dz$$

$$=P^{k-n}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^1 e^{2\pi izu^n}du\right)^k e^{-2\pi iz}dz+R_1,$$

其中

$$R_1\ll P^{k-n}\int_{\frac{P^n}{q\tau}}^{\infty}\left|\int_0^1 e^{2\pi izu^n}du\right|^k dz\ll P^{k-n}\int_{\frac{P^n}{q\tau}}^{\infty}z^{-\frac{k}{n}}dz$$

$$\ll P^{k-n}P^{-\frac{3}{4}\left(\frac{k}{n}-1\right)}\ll P^{k-n-\frac{3}{4}}.$$

再设

$$\sigma_1 = \sum_{q \leqslant P^{0.25}} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ (a,q)=1}} \left(\frac{S(a,q)}{q}\right)^k e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} = \sigma(N) + R_2,$$

这里

$$\sigma(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ (a,q)=1}} \left(\frac{S(a,q)}{q}\right)^k e^{-2\pi i \frac{a}{q} N},$$

$$R_2 \ll \sum_{q > P^{0.25}} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ (a,q)=1}} \left|\frac{S(a,q)}{q}\right|^k \ll \sum_{q > P^{0.25}} q^{-\frac{k}{n}+1}$$

$$\ll P^{-\frac{1}{4}\left(\frac{k}{n}-2\right)} \ll P^{-\frac{1}{4n}}.$$

显然，有不等式

$$\sigma(N) \ll 1, \quad \gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i x u^n} du\right)^k e^{-2\pi i x} dx \ll 1.$$

由所得的 $\gamma_1(q)$ 和 σ_1 的公式及式(5)，得到

$$J_1 = \sigma(N) \gamma N^{\frac{k}{n}-1} + O\left(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{4n^2}}\right),$$

这就是所要证明的.

我们来研究 Waring 问题的"奇异"级数 $\sigma(N)$，并计算 γ.

引理 2. 存在仅依赖于 n 和 k 的正常数 $c = c(n, k) > 0$，使得定理 1 中的"奇异"级数

$$\sigma(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 0 \leqslant a < q}} \left(\frac{S(a,q)}{q}\right)^k e^{-2\pi i \frac{a}{q} N},$$

当 $k \geqslant 4n$ 时大于 $c = c(n, k)$，即

$$\sigma(N) > c > 0.$$

证. 函数

$$\Phi(q) = \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 0 \leqslant a < q}} \left(\frac{S(a,q)}{q}\right)^k e^{-2\pi i \frac{a}{q} N}$$

是可乘的. 实际上，若 $q = q_1 q_2$，$(q_1, q_2) = 1$，$a = a_1 q_2 + a_2 q_1$，则

$$S(a,q)=\sum_{x_1=1}^{q_1}\sum_{x_2=1}^{q_2}e^{2\pi i\frac{a}{q}(x_1q_2+x_2q_1)^n}$$

$$=\sum_{x_1=1}^{q_1}e^{2\pi i\frac{aq_2^{n-1}}{q_1}x_1^n}\sum_{x_2=1}^{q_2}e^{2\pi i\frac{aq_1^{n-1}}{q_2}x_2^n}$$

$$=\sum_{x_1=1}^{q_1}e^{2\pi i\frac{a_1}{q_1}x_1^n}\sum_{x_2=1}^{q_2}e^{2\pi i\frac{a_2}{q_2}x_2^n};$$

$$\Phi(q)=\sum_{\substack{(a_1,q_1)=1\\0\leqslant a_1<q_1}}\sum_{\substack{(a_2,q_2)=1\\0\leqslant a_2<q_2}}\left(\frac{S(a_1q_2+a_2q_1,q_1q_2)}{q_1q_2}\right)^k e^{-2\pi i\left(\frac{a_1N}{q_1}+\frac{a_2N}{q_2}\right)}$$

$$=\Phi(q_1)\Phi(q_2).$$

其次,因为

$$\Phi(q)\ll q^{-\frac{k}{n}+1},\tag{6}$$

所以

$$\prod_{p\leqslant X}(1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\cdots)=\sum_{q\leqslant X}\Phi(q)+R(X),$$

其中

$$R(X)\ll\sum_{q>X}|\Phi(q)|\ll X^{-\frac{k}{n}+2}.$$

在上面的等式中取极限 $X\to+\infty$，得到

$$\sigma(N)=\prod_{p}(1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\cdots).$$

我们要注意到,对 $r\geqslant 1$，$\Phi(p^r)$ 是实数。

再次应用估计式(6):

$$\left|\sum_{r=1}^{\infty}\Phi(p^r)\right|\leqslant c_1(k,n)\sum_{r=1}^{\infty}p^{-\left(\frac{k}{n}-1\right)r}\leqslant c_2(k,n)p^{-3};$$

所以当 $p>c_3(k,n)$ 时,

$$1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\cdots>1-\frac{1}{p^2},$$

即

$$\sigma(N) = \Big(\prod_{p \leqslant c_2(k,n)} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \cdots)\Big)$$

$$\times \prod_{p > c_2(k,n)} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \cdots)$$

$$\geqslant \frac{6}{\pi^2} \prod_{p \leqslant c_2(k,n)} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \cdots).$$

余下要证明最后这一乘积中的每一括号内的值都大于零.

以 $T_k(p^m)$ 表示同余方程

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n \equiv N \pmod{p^m} \tag{7}$$

的解数. 那末,就有

$$\Phi(p^r) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^r} \Big(p^{-r} \sum_{x=1}^{p^r} e^{2\pi i \frac{a}{p^r} x^n}\Big)^k e^{-2\pi i \frac{a}{p^r} N}$$

$$= p^{-rk} \sum_{a=1}^{p^r} \Big(\sum_{x=1}^{p^r} e^{2\pi i \frac{a}{p^r} x^n}\Big)^k e^{-2\pi i \frac{a}{p^r} N}$$

$$- p^{-rk+k} \sum_{a=1}^{p^{r-1}} \Big(\sum_{x=1}^{p^{r-1}} e^{2\pi i \frac{a}{p^{r-1}} x^n}\Big) e^{-2\pi i \frac{a}{p^{r-1}} N}$$

$$= p^{-r(k-1)} T_k(p^r) - p^{-(r-1)(k-1)} T_k(p^{r-1});$$

$$1 + \sum_{r=1}^{m} \Phi(p^r) = p^{-m(k-1)} T_k(p^m). \tag{8}$$

我们来估计当 m 足够大时 $T_k(p^m)$ 的下界. 首先考虑 $T_k(p^\gamma)$, 这里

$$\gamma = \begin{cases} \tau + 1, & 若\ p > 2,\ n = p^\tau n_1,\ (n_1, p) = 1; \\ \tau + 2, & 若\ p = 2,\ n = p^\tau n_1,\ (n_1, p) = 1. \end{cases}$$

我们来证明, 当 $k \geqslant 4n$ 时, $T(p^\gamma) > 0$, 即同余方程 (7) 有解 $x_1^{(0)}, \cdots, x_k^{(0)}$, 而且 $x_j^{(0)}$, $1 \leqslant j \leqslant k$, 中至少有一个不能被 p 整除. 不失一般性,可以认为 $0 < N < p^\gamma$, $(N, p) = 1$, $k = 4n - 1$.

若 $p = 2$, 则 $p^\gamma = 2^{\tau+2} \leqslant 4n$, 上下面所选取的数就是所需要的解:

$$x_1 = \cdots = x_N = 1, \quad x_{N+1} = \cdots = x_k = 0.$$

设 $p > 2$ 及 g 是模 p^γ 的原根．若

$$N \equiv g^\alpha \pmod{p^\gamma},\ N_1 \equiv g^\beta \pmod{p^\gamma},\ \alpha \equiv \beta \pmod{n},$$

则同余方程

$$x_1^n + \cdots + x_k^n \equiv N \pmod{p^\gamma} \tag{9}$$

和同余方程

$$\bar{x}_1^n + \cdots + \bar{x}_k^n \equiv N_1 \pmod{p^\gamma}$$

的解数相同，这是因为 $\alpha = \beta + n\delta$

$$(\bar{x}_1 g^\delta)^n + \cdots + (\bar{x}_k g^\delta)^n \equiv N_1 g^{\delta n} \equiv N \pmod{p^\gamma}.$$

以 $k(N)$ 表示使同余方程 (9) 有所需要的解的最小的 k，并设 m 为所有不相同的 $k(N)$ 的个数．显然有 $m \leqslant n$．我们把所有(和 p 互素)的 N 分为如下的 m 类：数 N' 和 N'' 属于同一类，如果 $k(N') = k(N'')$．再设 $N_1, N_2, \cdots, N_m$ 是这些类中的最小自然数[1]．我们来证明，$k(N_r) \leqslant 2r - 1$，$r = 1, 2, \cdots, m$．当 $r = 1$ 时，应有 $N_1 = 1$，所以，$k(N_1) = 1 \leqslant 2 \cdot 1 - 1$．若不等式对 $r = 1, 2, \cdots, h$ 都成立，那么考虑两个数 $N_{h+1} - 1$ 及 $N_{h+1} - 2$，显然，它们小于 N_{h+1}，且其中一定有一个不是 p 的倍数，因而，这一个数就属于已经讨论过的某一类，即 $k(N_{h+1}) \leqslant 2h - 1 + 2 = 2(h+1) - 1$，这就是所要证明的．于是就有，$k(N) \leqslant k(N_m) \leqslant 2m - 1 \leqslant 2n - 1 < 4n$．这样一来，同余方程 (9) 就有解 $x_1^{(0)}, \cdots, x_k^{(0)}$，使得 $(x_1^{(0)}, p) = 1$．

其次，我们指出：若同余方程

$$y^n \equiv a \pmod{p^\gamma}, \quad (y, p) = 1, \tag{10}$$

可解，则对于任意的 $m > \gamma$，同余方程

$$x^n \equiv a \pmod{p^m} \tag{11}$$

亦可解．设 y_0 是同余方程 (10) 的解，$(y_0, p) = 1$，以及 g 是模 p^m 的原根，如果 $p > 2$；$g = 5$，如果 $p = 2$．取自然数 b 使得

$$g^b y_0^n \equiv a \pmod{p^m},$$

1) N_i 按递增次序排列，不难看出 $k(N_i)$ 亦是递增的．——译者注

则
$$g^b \equiv 1 \pmod{p^r},\quad b = p^r(p-1)b_1.$$
对任意的自然数 r，考虑表达式
$$b + rp^{m-1}(p-1) = p^r(p-1)(b_1 + rp^{m-1-r});$$
因为 $n = p^r n_1$，$(n_1, p) = 1$，所以可取 r 使得 $b_1 + rp^{m-1-r}$ 能被 n_1 整除；这样就有
$$b_1 + rp^{m-1-r} = n_1 h;\quad b + rp^{m-1}(p-1) = nh(p-1);$$
$$g^{b+rp^{m-1}(p-1)} \equiv g^b \pmod{p^m};\quad g^{b+rp^{m-1}(p-1)}y_0^n \equiv a \pmod{p^m}.$$
所以 $x_0 = y_0 g^{h(p-1)}$ 就是同余方程 (11) 的解.

进而来估计 $T_k(p^m)$ 的下界. 考虑同余方程
$$x_1^n + (x_2 + p^\gamma y_2)^n + \cdots + (x_k + p^\gamma y_k)^n \equiv N \pmod{p^\gamma},$$
$$1 \leqslant x_1, x_2, \cdots, x_k \leqslant p^\gamma,\quad 1 \leqslant y_2, \cdots, y_k \leqslant p^{m-\gamma}.$$
当 $k \geqslant 4n$ 时，它有解 $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_k^{(0)}$，$(x_1^{(0)}, p) = 1$，因而，对于 $x_1^{(0)}, \cdots, x_k^{(0)}, y_2, \cdots, y_k$，它有
$$p^{(k-1)(m-\gamma)}$$
组解. 而这时，对任意的 $y_2, \cdots, y_k$，$1 \leqslant y_2, \cdots, y_k \leqslant p^{m-\gamma}$，同余方程
$$x_1^n \equiv N - (x_2^{(0)} + p^\gamma y_2)^n - \cdots - (x_k^{(0)} + p^\gamma y_k)^n \pmod{p^m}$$
对 x_1 是可解的，即
$$T_k(p^m) \geqslant p^{(k-1)(m-\gamma)}.$$
由此及式 (8) 推得
$$1 + \sum_{r=1}^{m} \Phi(p^r) = p^{-m(k-1)} T_k(p^m) \geqslant p^{-\gamma(k-1)};$$
$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \Phi(p^r) \geqslant p^{-\gamma(k-1)};$$
$$\prod_{p \leqslant c_2(k,n)} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \cdots) \geqslant \prod_{p \leqslant c_2(k,n)} p^{-\gamma(k-1)}$$
$$\geqslant c_3(k, n) > 0;$$
$$\sigma(N) > c(k, n) > 0.$$

引理证毕.

引理 3. 当 $k \geqslant n+1$ 时,等式

$$\gamma = \gamma(n,k) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^1 e^{2\pi i z u^n} du\right)^k e^{-2\pi i z} dz$$

$$= \frac{\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^k}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)}$$

成立.

证. 考虑更一般的积分

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^1 e^{2\pi i z u^n} du\right)^k e^{-2\pi i x z} dz, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

因为

$$\left|\int_0^1 e^{2\pi i z u^n} du\right| \ll \min\left(1, \frac{1}{|z|^{1/n}}\right),$$

所以当 $k \geqslant n+1$ 时, $g(x)$ 绝对收敛. 其次,当 $0 < c \leqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned} F(c) &= \int_0^c g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^1 e^{2\pi i z u^n} du\right)^k \frac{1-e^{-2\pi i z c}}{2\pi i z} dz \\ &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 du_1 \cdots du_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i z(u_1^n+\cdots+u_k^n)} - e^{2\pi i z(u_1^n+\cdots+u_k^n-c)}}{2\pi i z} dz \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cdots \int_0^1 du_1 \cdots du_k \int_0^{\infty}\left(\frac{\sin 2\pi z\lambda}{z} - \frac{\sin 2\pi z(\lambda-c)}{z}\right) dz, \end{aligned}$$

其中 $\lambda = u_1^n + \cdots + u_k^n$.

因为 $\int_0^{\infty}\frac{\sin \alpha x}{x_1}dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha$, 所以

$$F(c) = \frac{1}{2}\int_0^1 \cdots \int_0^1 (\operatorname{sign}\lambda - \operatorname{sign}(\lambda - c)) du_1 \cdots du_k$$

$$= \int_{0 \leqslant \lambda \leqslant c} \cdots \int du_1 \cdots du_k.$$

作积分变量替换 $u_1 = t_1^{\frac{1}{n}} c^{\frac{1}{n}}, \cdots, u_k = t_k^{\frac{1}{n}} c^{\frac{1}{n}}$, 得到 Dirichlet 积分(第二章定理 7):

$$F(c) = n^{-k}c^{\frac{k}{n}} \int\cdots\int_{\substack{0\leqslant t_1+\cdots+t_k\leqslant 1\\ 0\leqslant t_1,\cdots,t_k\leqslant 1}} t_1^{\frac{1}{n}-1}\cdots t_k^{\frac{1}{n}-1}\,dt_1\cdots dt_k$$

$$= n^{-k}c^{\frac{k}{n}}\frac{\Gamma^k\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{n}+1\right)} = \frac{n}{k}\,c^{\frac{k}{n}}\frac{\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^k}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

对 $F(c)$ 求微商，得到：

$$g(c) = c^{\frac{k}{n}-1}\frac{\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^k}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

当 $c=1$ 时，即得引理的结论.

§2. H. Weyl 和的估计及 Waring 问题的渐近公式

定义. 形为

$$S = S(\alpha_{n+1},\cdots,\alpha_1) = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}$$

的三角和称为 H. Weyl 和，其中 $f(x)=\alpha_{n+1}x^{n+1}+\cdots+\alpha_1 x$，$\alpha_\nu$ 是实数，$\nu=n+1,n,\cdots,1$.

定理 2. 设

$$\alpha_{n+1}=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\ (a,q)=1,\ |\theta|\leqslant 1,\ P^{\frac{1}{4}}\leqslant q\leqslant P^{n+1-\frac{1}{4}},$$

S 是 H. Weyl 和. 那么，有

$$|S|\leqslant c(n)P^{1-\frac{1}{400n^2\log n}}.$$

证. 我们将使用第五章引理 1 中所引进的记号，并利用该章的引理 1，3，5，6 及定理 1. 证明定理的步骤和证明第五章定理 2 相似.

首先，当 $Y=[P^{1-\frac{1}{n^4}}]$ 时，有

$$S = W + O(Y),$$

其中

$$W = Y^{-1}\sum_{y=1}^{Y}\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x+y)}.$$

按 x 的幂展开 $f(x+y)$：

$$f(x+y) = \alpha_{n+1}x^{n+1} + g_1(y)x^n + \cdots + g_n(y)x + g_0(y).$$

对于整数 $k \geqslant 1$，应用第五章的引理 3 和 1，得到

$$\begin{aligned}
|W|^{2k} &\leqslant Y^{-1}\sum_{y=1}^{Y}\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_{n+1}x^{n+1}+g_1(y)x^n+\cdots)}\right|^{2k} \\
&= Y^{-1}\sum_{y=1}^{Y}\sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\lambda_{n+1}} J_{k,n+1}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\lambda_{n+1}) \\
&\quad\times e^{2\pi i(\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}+g_1(y)\lambda_n+\cdots)} \\
&\leqslant Y^{-1}\sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\lambda_{n+1}} J_{k,n+1}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\lambda_{n+1}) \\
&\quad\times\left|\sum_{y=1}^{Y} e^{2\pi i(\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}+g_1(y)\lambda_n+\cdots)}\right| \\
&= Y^{-1}\sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} J_{k,n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \\
&\quad\times\left|\sum_{y=1}^{Y} e^{2\pi i(g_1(y)\lambda_n+\cdots+g_n(y)\lambda_1)}\right| \\
&\leqslant Y^{-1}\sqrt{\sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} J_{k,n}^2(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)} \\
&\quad\times\sqrt{\sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}\left|\sum_{y=1}^{Y} e^{2\pi i(g_1(y)\lambda_n+\cdots+g_n(y)\lambda_1)}\right|^2}.
\end{aligned}\tag{12}$$

由第五章引理 1 知，

$$\sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} J_{k,n}^2(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \leqslant J_{k,n}(0,\cdots,0)P^{2k};\tag{13}$$

由第五章定理 1 知，当 $k \geqslant n\tau + n^2$ 时，

$$J_{k,n}(0,\cdots,0) \leqslant (4n)^{4k\tau}P^{2k-\frac{n^2+n}{2}+\frac{n^2+n}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\tau}}.\tag{14}$$

其次，$g_1(y)=(n+1)\alpha_{n+1}y+\alpha_n$，$|\lambda_\nu|<2kP^\nu$，$\nu=1,\cdots,n$；所以，应用第五章引理5，得到

$$\sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}\left|\sum_{y=1}^{Y}e^{2\pi i(g_1(y)\lambda_n+\cdots+g_n(y)\lambda_1)}\right|^2$$

$$=\sum_{y,y_1=1}^{Y}\sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}e^{2\pi i(\lambda_n(y-y_1)\alpha_{n+1}+\cdots+\lambda_1(g_n(y)-g_n(y_1)))}$$

$$\leqslant\sum_{y,y_1=1}^{Y}\min\left(2kP^n,\ \frac{1}{((y-y_1)(n+1)\alpha_{n+1})}\right)\sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}}1$$

$$\leqslant(2k)^{n-1}P^{\frac{n(n-1)}{2}}\sum_{y,y_1=1}^{Y}\min\left(2kP^n,\ \frac{1}{((y-y_1)(n+1)\alpha_{n+1})}\right). \tag{15}$$

最后，利用第五章引理6估计上面的和式，得到

$$\sum_{y,y_1=1}^{Y}\min\left(2kP^n,\ \frac{1}{((y-y_1)(n+1)\alpha_{n+1})}\right)$$

$$\leqslant 6Y\left(\frac{(n+1)Y}{q}+1\right)(2kP^n+q\log q)$$

$$\leqslant 24kn(\log P)Y^2\left(\frac{P^n}{q}+\frac{P^n}{Y}+\frac{q}{Y}\right)$$

$$\leqslant 72kn(\log P)Y^2P^{n-\frac{1}{4}}. \tag{16}$$

从式(12)—(16)推得

$$|W|^{2k}\leqslant Y^{-1}\sqrt{c_1(n,\ k)Y^4P^{\omega}\log P},$$

其中

$$c_1(n,k)=(72kn)(4n)^{4k\tau}(2k)^{n-1},$$

$$\omega=4k-\frac{1}{4}+\frac{n^2+n}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\tau}.$$

取 $\tau=[4n\log n]+1\geqslant 4n\log n$，$k=n^2+n\tau\leqslant 5n^2\log n$。那么就有

$$|W|\leqslant c_2(n)P^{1-\frac{1}{400n^2\log n}};$$

$$|S| \leqslant c(n)P^{1-\frac{1}{400n^2\log n}},$$

这就是所要求证的。

定理 3. 当 $k \geqslant cn^2 \log n$ 时，对于表自然数 N 为形式 (1) 的表法个数 $J_{k,n}(N)$，有渐近公式

$$J_{k,n}(N) = \gamma\sigma(N)N^{\frac{k}{n}-1} + O(N^{\frac{k}{n}-\frac{c_1}{n^2}-1}),$$

其中

$$\gamma = \frac{\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^k}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)}, \quad \sigma(N) > c_0(n, k) > 0.$$

证. 由圆法（见 § 1）得到

$$J = J_{k,n}(N) = J_1 + J_2,$$

其中

$$J_1 = \int_{E_1} S^k(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha, \quad J_2 = \int_{E_2} S^k(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha.$$

从定理 1，引理 2 和 3 推得

$$J_1 = \gamma\sigma(N)N^{\frac{k}{n}-1} + O(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{4n^2}}).$$

从定理 2 知，对 $\alpha \in E_2$，有

$$|S(\alpha)| \leqslant c_3(n)P^{1-\frac{1}{800n^2\log n}}.$$

利用第五章引理 1 及定理 1，可得到，当 $n^2 + n\tau \leqslant k_1 < \frac{k}{2}$ 时，

$$\begin{aligned}|J_2| &\leqslant c_4(n, k)P^{(k-2k_1)\left(1-\frac{1}{800n^2\log n}\right)}\int_0^1 |S(\alpha)|^{2k_1}d\alpha \\ &= c_4(n, k)P^{(k-2k_1)\left(1-\frac{1}{800n^2\log n}\right)}\sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}} J_{k_1,n}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, 0) \\ &\leqslant (2k)^n c_4(n, k)P^{(k-2k_1)\left(1-\frac{1}{800n^2\log n}\right)}P^{2k_1-n+\frac{n^2+n}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^\tau}.\end{aligned}$$

现在取 $\tau = [4n\log n] + 1 \geqslant 4n\log n$，$k_1 = n^2 + n\tau$，$k = 2k_1 +$

$800n^2$，就得到定理的断言.

§3. $G(n)$ 的估计

在作进一步研究时，我们引进一个新的适用的定义.

定义. 当 $n \geqslant 3$ 时，函数 $G(n)$ 等于这样的 k 的最小值，对于每一个这样的 k，任一自然数 $N \geqslant N_0(n)$ 可以表为 k 个形为 x^n (x 为自然数)的项之和.

定理 4. 对 $G(n)$，估计式

$$n \leqslant G(n) \leqslant cn \log n$$

成立.

证. 若 $k \leqslant n-1$，则所有不超过 X 且能表为 k 个形为 x^n (x 为自然数)的项之和的自然数个数不大于 $X^{\frac{k}{n}} \leqslant X^{1-\frac{1}{n}}$. 由此就推出了定理的第一个结论. 为了证明第二个结论，考虑方程

$$\begin{aligned} x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n + u_1^n + \cdots + u_m^n \\ + u_{m+1}^n + \cdots + u_{2m}^n = N, \end{aligned} \tag{17}$$

这里 $x_1, x_2, \cdots, x_k, u_1, \cdots, u_{2m}$ 是自然数，而且

$$P_1 = \frac{1}{4}N^{\frac{1}{n}} < u_1, u_{m+1} < \frac{1}{2}N^{\frac{1}{n}} = 2P_1,$$

$$P_2 = \frac{1}{2}P_1^{1-\frac{1}{n}} < u_2, u_{m+2} < P_1^{1-\frac{1}{n}} = 2P_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_m = \frac{1}{2}P_{m-1}^{1-\frac{1}{n}} < u_m, u_{2m} < P_{m-1}^{1-\frac{1}{n}} = 2P_m.$$

首先，

$$\begin{aligned} 4^{-n}N = P_1^n \leqslant u_1^n + \cdots + u_m^n + u_{m+1}^n + \cdots + u_{2m}^n \\ \leqslant 4(2P_1)^n = 2^{-n+2}N. \end{aligned}$$

其次，方程

$$u_1^n + \cdots + u_m^n = u_{m+1}^n + \cdots + u_{2m}^n \tag{18}$$

仅有这样形式的解：$u_1 = u_{m+1}, u_2 = u_{m+2}, \cdots, u_m = u_{2m}$. 实际上，假如说，$u_1 \neq u_{m+1}$，则

$$|u_1^n - u_{m+1}^n| > nP_1^{n-1},$$

$$|u_2^n + \cdots + u_m^n - u_{m+2}^n - \cdots - u_{2m}^n| \leqslant (2P_2)^n = P_1^{n-1},$$

所以等式 (18) 不可能成立.

设 $I(N)$ 是方程 (17) 的解数. 那么,

$$I(N) = \int_0^1 S^k(\alpha) T_1^2(\alpha) \cdots T_m^2(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha,$$

其中

$$S(\alpha) = \sum_{1 \leqslant x \leqslant P} e^{2\pi i \alpha x^n}, \quad P = N^{\frac{1}{n}},$$

$$T_1(\alpha) = \sum_{u_1} e^{2\pi i \alpha u_1^n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_m(\alpha) = \sum_{u_m} e^{2\pi i \alpha u_m^n}.$$

利用 § 1 中所定义的集合 E_1, E_2, 就有

$$I(N) = I_1(N) + I_2(N).$$

估计 $I_2(N)$. 根据定理 2 ,对 $\alpha \in E_2$ 有

$$|S(\alpha)| \leqslant c_3(n) P^{1-\frac{1}{800n^2\log n}}, \quad P = N^{\frac{1}{n}}.$$

所以,

$$|I_2(N)| \leqslant c_4(n, k) P^{k\left(1-\frac{1}{800n^2\log n}\right)} \int_0^1 |T_1(\alpha)|^2 \cdots |T_m(\alpha)|^2 d\alpha.$$

上式中的积分等于方程 (18) 的解数,即 $u_1, \cdots, u_m$ 所有可能选取的组数,因而不超过

$$P_1 P_2 \cdots P_m \leqslant c_5(n, m) N^{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^m}.$$

所以

$$|I_2(N)| \leqslant c_4(n, k) P_1 P_2 \cdots P_m N^{\frac{k}{n} - \frac{k}{800n^3\log n}}.$$

估计 $I_1(N)$ 的下界. 由 $I_1(N)$ 的定义知,

$$I_1(N) = \sum_{u_1, u_{m+1}} \cdots \sum_{u_m, u_{2m}} \int_{E_1} S^k(\alpha) e^{-2\pi i \alpha (N - u_1^n - \cdots - u_{2m}^n)} d\alpha.$$

而积分

$$\int_{E_1} S^k(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N_1}d\alpha,$$

当 $\left(1-\frac{4}{2^n}\right)N \leqslant N_1 \leqslant \left(1-\frac{1}{4^n}\right)N$ 及 $k \geqslant 4n$ 时，可根据定理 1 来计算(并参看引理 2 和 3)：

$$\int_{E_1} S^k(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N_1}d\alpha = \gamma\sigma(N_1)N_1^{\frac{k}{n}-1} + O(N_1^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{4n^2}})$$

$$\geqslant c(k,n)N^{\frac{k}{n}-1} - c_1(k,n)N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{4n^2}}.$$

由此得到

$$I_1(N) \geqslant \sum_{u_1,u_{m+1}} \cdots \sum_{u_m,u_{2m}} \left(c(k,n)N^{\frac{k}{n}-1} - c_1(k,n)N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{4n^2}}\right)$$

$$\geqslant 2^{-2m}(P_1P_2\cdots P_m)^2 c(k,n)N^{\frac{k}{n}-1}$$

$$- c_1(k,n)(P_1P_2\cdots P_m)^2 N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{4n^2}}.$$

因为

$$P_1P_2\cdots P_m \geqslant c_6(n,m)N^{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^m},$$

所以，当 $k=4n$, $m=[c_0 n\log n]$, $N \geqslant N_0(n)$ 时，就有

$$I(N) = I_1(N) + I_2(N) > 0,$$

这就是所要证明的。

问　　题

1. 设 $p \geqslant 3$, $n_1,\cdots,n_k$ 是固定的自然数，$T_k(\lambda)$ 是同余方程

$$x_1^{n_1} + \cdots + x_k^{n_k} \equiv \lambda \pmod{p}$$

的解数．证明：当 $\lambda \not\equiv 0 \pmod{p}$ 时，有

$$T_k(\lambda) = p^{k-1} + O(p^{\frac{k-1}{2}})$$

(参看第十一章 § 1)．

2. 设 $p \geqslant 3$ 是固定的素数，

$$Q = p^\alpha,\quad P \leqslant Q,\quad m = \frac{\log Q}{\log P} \leqslant \sqrt{n}.$$

证明：对于任意的 $N \geqslant 1$，同余方程

$$x_1^n + \cdots + x_k^n \equiv N(\bmod Q), \quad 1 \leqslant x_1, \cdots, x_k \leqslant P,$$

当 $k \geqslant 30m$ 时可解，以及存在这样的 N，使得当 $k \leqslant m-1$ 时，这同余方程无解(参看第十一章§3)。

3. 试求方程 ($n \geqslant 2$)

$$p_1 + p_2 + x^n = N$$

的解数的渐近公式，p_1, p_2 是素数，x 是自然数(参看第十，十一章)。

4. 试求方程 ($n \geqslant 2$)

$$p + x^2 + y^3 + z^n = N$$

的解数的渐近公式，p 是素数，x, y, z 是自然数(参看第十，十一章)。

参 考 文 献

[1] И. М. Виноградов, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Москва, «Наука», 1971.

[2] И. М. Виноградов, Избранные труды, Москва, Изд-во АН СССР, 1952.

[3] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, Oxford, 1951.

[4] 华罗庚，指数和的估计及其在数论中的应用，科学出版社，1963.

[5] H. Davenport, Multiplicative number theory, Markham, 1967.

[6] K. Chandrasekharan, Arithmetical function, Springer, 1975.

[7] H. L. Montgomery, Topics in multiplicative number theory, Springer, 1971.

[8] Н. Г. Чудаков, Введение в теорию L-функций Дирихле, Москва, Гостехиздат, 1947.

[9] A. E. Ingham, The distribution of prime numbers, Cambridge, 1932.

[10] K. Prachar, Primzahlverteilung, Springer, 1957.